פתרון תרגיל 8 מבוא לתורת החבורות תשע"ט

לפעמים רשמתי תמורה עם פסיקים בין האיברים (כשהתעצלתי לעשות רווח קטן).

שאלה 1. תהי G חבורה.

1. הוכיחו שלכל $a,b\in G$, אם $o(ab)$ סופי אז: $o(ab)=o(ba)$. הסיקו שבכל מקרה, $o(ab)=o(ba)$.
2. יהי $g\in G$ מסדר סופי. הוכיחו שאם h צמוד ל-g, אז $o(h)=o(g)$.
3. הוכיחו שאם g הוא האיבר היחיד מסדר n, אז $g\in Z(g)$.
4. האם בסעיפים $2,3$ הכיוונים ההפוכים גם נכונים? כלומר, הוכיחו או הפריכו:
   (א) אם $o(h)=o(g)$ אז h,g צמודים.
   (ב) אם $g\in Z(g)$ הוא מסדר n, אז g הוא האיבר היחיד מסדר n.

פתרון. .

א. נסמן: $o(ab)=n$. לכן: $ababab\dots ab=e$, כשהמכפלה היא n פעמים. נכפיל משמאל ב-a^{-1} ומימין ב-a ונקבל:

$$a^{-1}ababab\dots aba=a^{-1}a\Longrightarrow babab\dots aba=e$$

כלומר $(ba)^n=e$, ולכן $o(ba)\leq n$, כלומר $o(ba)\leq o(ab)$. אם נפעיל את אותו השיקול על ab נקבל $o(ba)\leq o(ab)$, וסה"כ נקבל את הדרוש.
אם $o(ab)=\infty$, נניח בשלילה ש: $o(ba)\neq\infty$ ואז לפי המקרה הסופי נקבל שגם $o(ab)\neq\infty$ וסתירה.

ב. מכיוון ש-h צמוד ל-g, קיים $x\in G$ עבורו: $xgx^{-1}=h$, ולפי הסעיף הקודם:

$$o(h)=o\left(xgx^{-1}\right)=o\left((xg)\,x^{-1}\right)=o\left(x^{-1}(xg)\right)=o(g)$$

ג. יהי $x\in G$, ונראה ש: $xg=gx$. מהסעיף הקודם: $o\left(xgx^{-1}\right)=o(g)$. לפי הנתון, g הוא היחיד מסדר n ולכן $xgx^{-1}=g$; נכפיל משמאל ב-x ונקבל שאכן: $xg=gx$.

ד. נפריך את שתי הטענות. נתבונן בחבורה $\mathbb{Z}_4$.

(א) מתקיים $o(1)=o(3)=4$, אבל האיברים $1,3$ לא צמודים (בחבורה אבלית, כל איבר צמוד לעצמו בלבד).

(ב) אותה הדוגמה בדיוק – המרכז של $\mathbb{Z}_4$ הוא כל החבורה (היא אבלית). 1 נמצא במרכז, אבל הוא לא האיבר היחיד מסדר 4.

שאלה 2. לכל תמורה $\sigma \in S_n$ ומחזור $(a_1\,a_2\,\ldots\,a_k)$ מתקיים: $\sigma\,(a_1\,a_2\,\ldots\,a_k)\,\sigma^{-1} = (\sigma\,(a_1)\;\sigma\,(a_2)\;\ldots\;\sigma\,(a_k))$. בחבורה S_6 נתבונן בתמורות הבאות:

$$\sigma = (1\,3)\,(2\,5\,6)\,,\;\; \tau = (1\,2\,3\,5)$$

חשבו את $\tau\sigma\tau^{-1}$.

פתרון. נשים לב שהתמורה σ איננה מחזור, אך נוכל להתגבר על הבעיה באופן הבא:

$$\tau\sigma\tau^{-1} = \tau\,(1\,3)\,(2\,5\,6)\,\tau^{-1} = \tau\,(1\,3)\,\tau^{-1}\tau\,(2\,5\,6)\,\tau^{-1} = (\tau\,(1)\;\tau\,(3))\,(\tau\,(2)\;\tau\,(5)\;\tau\,(6))$$

ובסה"כ: $(2\,5)\,(3\,1\,6)$.

שאלה 3. תהי $\sigma \in S_n$ תמורה. נפרק אותה למכפלה של מחזורים זרים $\sigma = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k$. נניח כי האורך של σ_i הוא r_i, וכי $r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_k$. נגדיר את מבנה המחזורים של σ להיות ה-k-יה הסדורה $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$. לדוגמה, מבנה המחזורים של $(1,2,3)\,(5,6)$ הוא $(3,2)$; מבנה המחזורים של $(4,2,3)\,(1,5)$ גם הוא $(3,2)$; מבנה המחזורים של $(1,2,3,4)\,(5,6)\,(7,8)$ הוא $(4,2,2)$. שתי תמורות צמודות ב-S_n אם ורק אם יש להן אותו מבנה מחזורים. למשל, התמורה $(1,2,3)\,(5,6)$ צמודה ל-$(4,2,3)\,(1,5)$ ב-S_8, אבל הן לא צמודות לתמורה $(1,2,3,4)\,(5,6)\,(7,8)$ ב-S_8. הוכיחו זאת. Cycle type

פתרון.

פתרון. (label=ד.) $(\Leftarrow)$ תהיינה $\sigma, \tau \in S_n$ שתי תמורות צמודות ב-S_n. נכתוב $\tau = \pi\sigma\pi^{-1}$. נניח כי $\sigma = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k$ הפירוק של σ למכפלה של מחזורים זרים; לכן

$$\tau = \pi\sigma\pi^{-1} = \pi\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k\pi^{-1} = \left(\pi\sigma_1\pi^{-1}\right)\left(\pi\sigma_2\pi^{-1}\right)\ldots\left(\pi\sigma_k\pi^{-1}\right)$$

לפי התרגיל הקודם, כל תמורה מהצורה $\pi\sigma_i\pi^{-1}$ היא מחזור; כמו כן, קל לבדוק כי כל שני מחזורים שונים כאלו זרים זה לזה (כי $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ זרים זה לזה). לכן, קיבלנו פירוק של τ למכפלה של מחזורים זרים, וכל אחד מהמחזורים האלו הוא מאותו האורך של המחזורים ב-σ. מכאן נובע של-σ ול-τ אותו מבנה מחזורים.

$(\Rightarrow)$ תהיינה $\sigma, \tau \in S_n$ עם אותו מבנה מחזורים. נסמן $\sigma = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k$, $\tau = \tau_1\tau_2\ldots\tau_k$, כאשר $\sigma_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,m_i})$ ו-$\tau_i = (b_{i,1}, b_{i,2}, \ldots, b_{i,m_i})$, $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ הם מחזורים זרים וגם $\tau_1, \ldots, \tau_k$ הם מחזורים זרים. נגדיר תמורה π כך: $\pi\,(a_{i,j}) = b_{i,j}$, וכל שאר האיברים נשלחים לעצמם. נשים לב כי

$$\begin{aligned}\pi\sigma_i\pi^{-1} &= \pi\,(a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,m_i})\,\pi^{-1} = (\pi\,(a_{i,1})\,, \pi\,(a_{i,2})\,, \ldots, \pi\,(a_{i,m_i})) = \\ &= (b_{i,1}, b_{i,2}, \ldots, b_{i,m_i}) = \tau_i\end{aligned}$$

ולכן

$$\pi\sigma\pi^{-1} = \pi\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k\pi^{-1} = \left(\pi\sigma_1\pi^{-1}\right)\left(\pi\sigma_2\pi^{-1}\right)\ldots\left(\pi\sigma_k\pi^{-1}\right) = \tau_1\tau_2\ldots\tau_k = \tau$$

מכאן ש-σ ו-τ צמודות ב-S_n.

שאלה 4. הוכיחו כי $Z\,(S_n) = \{id\}$ לכל $n \geq 3$.

פתרון.

א. תהי $a \in Z\,(S_n)$, ונניח בשלילה כי $a \neq id$. תהי $a \neq b \in S_n$ תמורה שונה מ-a עם אותו מבנה מחזורים כמו של a. לפי התרגיל שפתרנו, קיימת $\sigma \in S_n$ שעבורה $\sigma a\sigma^{-1} = b$. אבל $a \in Z\,(S_n)$, ולכן נקבל

$$b = \sigma a\sigma^{-1} = a\sigma\sigma^{-1} = a$$

בסתירה לבחירה של b. לכן בהכרח $a = id$, כלומר $Z\,(S_n) = \{id\}$.

שאלה 5. מצאו את $C_{S_5}(\sigma)$ עבור $\sigma=(1,2,5)$.

פתרון.

א. במילים אחרות, צריך למצוא את התמורות המתחלפות עם σ. תמורה τ מתחלפת עם σ אם ורק אם $\tau\sigma=\sigma\tau$ אם ורק אם $\tau\sigma\tau^{-1}=\sigma$. לכן, צריך למצוא אילו תמורות משאירות את σ במקום כשמצמידים בהן. יש שני סוגים של תמורות כאלו:

(א) תמורות שזרות ל-σ - יש רק אחת כזו, והיא $(3,4)$.

(ב) תמורות שמזיזות את σ במעגל - id, $(1,2,5)$ ו-$(1,5,2)$.

כמובן, כל מכפלה של תמורות המתחלפות עם σ גם הוא מתחלף עם σ, ולכן מקבלים שהרשימה המלאה היא

$$\{id,(3,4),(1,2,5),(1,2,5)(3,4),(1,5,2),(1,5,2)(3,4)\}$$

שאלה 6. תהי G חבורה. הוכיחו: אם ${}^{G}/_{Z(G)}$ היא ציקלית, אזי G אבלית.

פתרון.

א. ${}^{G}/_{Z(G)}$ ציקלית, ולכן קיים $a\in G$ שעבורו ${}^{G}/_{Z(G)}=\langle aZ(G)\rangle$. כמו כן, אנחנו יודעים כי

$$G=\bigcup_{g\in G}gZ(G)$$

(כי כל חבורה היא איחוד המחלקות של תת־חבורה). כעת, $gZ(G)\in{}^{G}/_{Z(G)}$, ולכן קיים i שעבורו

$$gZ(G)=(aZ(G))^{i}=a^{i}Z(G)$$

(לפי הציקליות). אם כן, מתקיים

$$G=\bigcup_{i\in\mathbb{Z}}a^{i}Z(G)$$

כעת נראה ש-G אבלית. יהיו $g,h\in G$. לכן קיימים $i,j\in\mathbb{Z}$ שעבורם

$$g\in a^{i}Z(G),h\in a^{j}Z(G)$$

כלומר קיימים $g',h'\in Z(G)$ שעבורם $g=a^{i}g'$ ו-$h=a^{j}h'$. לכן,

$$gh=a^{i}g'a^{j}h'=a^{i}a^{j}g'h'=a^{j}a^{i}h'g'=a^{j}h'a^{i}g'=hg$$

הוכחנו שלכל $g,h\in G$ מתקיים $gh=hg$, ולכן G אבלית.

שאלה 7. שאלה לקראת שבוע הבא – יהי p ראשוני. מצאו חבורה אינסופית שבה הסדר של כל איבר הוא חזקה של p. רמז: מצאו חבורה אינסופית שבה הסדר של כל איבר הוא סופי, ובחרו תת-חבורה שבה הסדר של כל איבר הוא חזקה של p.

הוכחה.

א. נתבונן בחבורת שורשי היחידה:

$$\Omega_{\infty}=\{z\in\mathbb{C}\,|\,\exists n\in\mathbb{N}:\ z^{n}=1\}$$

ונתבונן בתת-החבורה הבאה:

$$Z(p^{\infty})=\left\{z\in\mathbb{C}\,|\,\exists n\in\mathbb{N}:\ z^{p^{n}}=1\right\}$$

השתכנעו שזו אכן תת-חבורה. חבורה זו נקראת חבורת פרופר, על שמו של היינץ פרופר – מתמטיקאי יהודי גרמני פורה, שנפטר בדמי ימיו.

□