

## תרגיל 5

1.

- א. הוכיחו את האי שוויון הבא:  $\binom{n}{j+k} \leq \binom{n}{j} \binom{n-j}{k}$
- ב. מתי יהיה זה שוויון ממש?

2. הוכיחו ש  $\frac{(2n)!}{2^n n!}$  מספר שלם חיובי לכל  $n$  שלם ואי שלילי.

3. מטילים קובייה  $n$  פעמים בזו אחר זו. מהן מספר האפשרויות
- א. כאשר אין הגבלות?
- ב. שהתקבלו בסה"כ עבור בדיוק 3 ערכים שונים?
- ג. שכל אחת ממשש התוצאות האפשרויות תתקבל לפחות פעם אחת?

4.

- א. בכמה דרכים ניתן לבחור 5 קלפים מתוך חבילה של 52 קלפים, כך שבין 5 הקלפים יש לפחות קלף אחד מכל סוג (לב, עלה, יהלום, תלתן)?
- ב. כמה מספרים בין 1 ל-10000 הם אי זוגיים, אינם מתחלקים ב-7 ואינם ריבועים שלמים.
- ג. כמה מספרים בין 1 ל-3000 אינם מתחלקים באף אחד מהמספרים 3,4,5.
- ד. כמה מספרים בין 1 ל-1000 מתחלקים בדיוק באחד מהמספרים 3,4,5.
- ה. כנ"ל לגבי מספרים בין 1001 ל-2000
- ו. חשב כמה מספרים שלמים בין 1 ל-1000 מתחלקים בדיוק בשנים בין המספרים 7,8,9

5.

- א. מה מספר הפתרונות למשוואה  $a + b + c + d + e = 10$
- i. כאשר כל המשתנים מספרים שלמים לא שליליים.
- ii. כאשר כל המשתנים הם מספרים שלמים חיוביים (גדלים ממש מ אפס) ובנוסף לכך  $a$  מספר שלם אי זוגי.
- ב. מהו מספר הפתרונות של אי השוויון  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 10$  כסכום של מספרים שלמים לא שליליים?

- ג. מהו מספר אפשרויות לפתור את המשוואה  
 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$  כאשר  $1 \leq x_i \leq 7$ ?
- ד. מהו מספר הפתרונות של המשוואה  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$   
כך ש  $1 \leq x_1 \leq 6$   $0 \leq x_2 \leq 8$   $-2 \leq x_3 \leq 3$   $6 \leq x_4 \leq 10$

6. בכמה דרכים ניתן לבחור  $k$  שלמים מתוך הקבוצה  $\{1, \dots, n\}$  כך שלא יהיה אף זוג שלמים עוקבים.

### הלמה של צורן

7. תהיי  $E$  קבוצה של קבוצות. הוכח שיש ל  $E$  תת קבוצה  $E_0$  בעלת התכונות הבאות:

- א. כל שני איברים של  $E_0$  זרים זה לזה.
- ב. כל איבר של  $E$ , שמחוץ ל  $E_0$ , נחתך חיתוך לא ריק עם אחד מאיברי  $E_0$ .