

תרגיל 9

להגשה בי"ב טבת (25.12) או י"ד טבת (27.12) - כל אחד בקבוצת התרגול שלו.

1. יהי V מ"מ"פ (עם נורמה מושרתת). $v \in V, v \neq 0$ הוכח כי הגודל של $\frac{v}{\|v\|}$ הוא 1 (תזכורת: גודל של וקטור w הוא $\|w\|$).

2. יהי V מ"מ"פ. W, U תתי מרחב. הוכח: $(W + U)^\perp = W^\perp \cap U^\perp$.

3. יהי V מ"מ"פ. $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ קבוצה אורתוגנלית. הוכח: B בת"ל. (הדרכה: התבונן בצ"ל שמתאפס והפעל מכפלה פנימית על שני הצדדים עם v_j).
נראה שימוש להטלות:

4. תהא $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$. נרצה לפתור את המערכת $Ax = b$. אם

נמצא את מרחב העמודות (אין צורך) נגלה כי לא נמצא ב $C(A)$ ולכן אין פתרון למערכת הנ"ל. לכן נרצה למצוא b' כך ש $b' \in C(A)$ שהוא קרוב ל b (במובן ש $\|b - b'\|$ מינמאלי. שימו לב ש $b - b'$ מציין את הסטייה מהפתרון המבוקש).
במילים אחרות: מצאו את ההטלה של b למרחב העמודות $C(A)$ בעזרת הסעיפים הבאים:

(א) מצאו בסיס אורתוגנלי ל $C(A)$ בעזרת תהליך גרם שמידט (עמודות A בת"ל-אין צורך לבדוק זאת).

(ב) כעת קל להטיל את b ל $C(A)$ עשו זאת.

(ג) חשבו את גודל הטעות כלומר $\|b - b'\|$

5. יהא $V = \mathbb{C}_1[x] = \{a + bx \mid a, b \in \mathbb{C}\}$. $B = \{1, x\}$ בסיס סטנדרטי של V . בעזרת תהליך גרם שמידט מצא בסיס אורתונורמלי ל V (ביחס למכפלה הפנימית

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx$$

בהצלחה!