26.8.18

88-195 בדידה – קורס קיץ תשע"ח – מועד א'

מרצים: אחיה בר און, ד"ר אפי כהן, אלעד עטייא, ד"ר ארז שיינר

מתרגלים: עדי בן צבי, תמר בראון, אריאל ויצמן, ד"ר מיכאל טויטו, עובד נגר, אלעד עטייא

אורך המבחן: 3 שעות

חומר עזר: מבחן פשוט בלבד.

הוראות:

- יש לענות על **כל** 5 השאלות. סה"כ הניקוד המקסימלי 108 נק' (כל ציון מעל 100 יעוגל ל 100).
- יש לענות על **דפי הבחינה** בלבד. ניתן להשתמש במחברת כטיוטה, אך המחברת **לא תיבדק כלל**

שאלה	ניקוד
1	
2	
3	
4	
5	

שאלה 1 (20 נקודות)

א. (8 נק') בנו פסוקים באמצעות הקשרים $\neg, \wedge$ בלבד, השקולים לפסוקים:

i. $p \vee q$

ii. $\left(p \wedge \left(p \to q\right)\right) \to q$

הערה: ניתן להיעזר בסוגריים ואין צורך להוכיח.

ב. (12 נק') תהיינה קבוצות A, B, הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

i. $\left(A \cup B\right) \setminus \left(A \cap B\right) = \left(\left(A \setminus B\right) \setminus A\right) \cup B$

ii. $P(A) \setminus P(A \setminus B) \supseteq P(A \cap B) \setminus \{\varnothing\}$

iii. $P\left(P\left(A\right)\right) \setminus P\left(P\left(B\right)\right) = P\left(P\left(A \setminus B\right)\right)$

פתרון שאלה 1

סעיף א1

$$p \vee q \equiv \neg\left(\neg p \wedge \neg q\right)$$

סעיף א2

$$p \to q \equiv \neg p \vee q \equiv \neg\left(\neg\left(\neg p \vee q\right)\right) \equiv \neg\left(p \wedge \neg q\right)$$

$$\left(p \wedge \left(p \to q\right)\right) \to q \equiv \neg\left(\left(p \wedge \left(p \to q\right)\right) \wedge \neg q\right) \equiv \neg\left(\left(p \wedge \neg\left(p \wedge \neg q\right)\right) \wedge \neg q\right)$$

סעיף ב1

לא נכון, דוגמה נגדית

$A = \{1\}, B = \varnothing$.

אגף ימין שווה לקבוצה ריקה. כי $B = \varnothing$.

אגף שמאל: $A \cup B = \{1\}, A \cap B = \varnothing \to \left(A \cup B\right) \setminus \left(A \cap B\right) = \{1\}$.

קיבלנו קבוצות שונות.

סעיף ב2

נכון,

תהי $X \in P(A \cap B) \setminus \{\varnothing\}$, צ"ל $X \in P(A) \setminus P(A \setminus B)$.

לפי הנתון, $X \subseteq A \cap B$ וגם $X \neq \varnothing$.

לכן בוודאי $X \subseteq A$ ולכן $X \in P\left(A\right)$.

כיוון ש $X \neq \varnothing$, קיים $x \in X$ ולפי הנתון $x \in A \cap B$ ולכן $x \in B$ ולכן $X \not\subset A \setminus B$ ולכן $X \notin P(A \setminus B)$.

סה"כ $X \in P(A) \setminus P(A \setminus B)$.

סעיף ב3

לא נכון, דוגמה נגדית

$A = \{1, 2\}, B = \{1\}$

אגף שמאל

$$\{\{1,2\}\} \notin P\left(P\left(A \setminus B\right)\right) \leftarrow \{1,2\} \notin P\left(A \setminus B\right) \leftarrow A \setminus B = \{2\}$$

אגף ימין

$$\{\{1,2\}\} \in P\left(P\left(A\right)\right) \leftarrow \{1,2\} \in P\left(A\right) \leftarrow A = \{1,2\}$$

$$\{\{1,2\}\} \notin P\left(P\left(B\right)\right) \leftarrow \{1,2\} \notin P\left(B\right) \leftarrow B = \{1\}$$

סה"כ $\{\{1,2\}\} \in P\left(P\left(A\right)\right) \setminus P\left(P\left(B\right)\right) \wedge \{\{1,2\}\} \notin P\left(P\left(A \setminus B\right)\right)$

שאלה 2 (20 נקודות)

תהי $A=P(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$ קבוצת הפונקציות מ $\mathbb{N}$ ל $P(\mathbb{N})$.

נגדיר את R יחס על A על ידי $fRg \Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}: f(n)\subseteq g(n)$.

א. (5 נק') הוכיחו כי R הינו יחס סדר חלקי.

ב. (5 נק') האם R יחס מלא? הוכיחו.

ג. (5 נק') האם יש איבר גדול ביותר ב A?
אם כן, מצאו אותו והוכיחו שהוא הגדול ביותר.
אם לא, הוכיחו שאין איבר גדול ביותר.

ד. (5 נק') תהיי $X=\left\{ f\in A \middle| \forall n\in\mathbb{N}: n\in f(n)\right\}$.
האם יש איבר קטן ב X? (לפי היחס R שהוגדר קודם)
אם כן, מצאו אותו והוכיחו שהוא הקטן ביותר.
אם לא, הוכיחו שאין איבר קטן ביותר.

ה. (5 נק') תהיי $D=\left\{ f\in A \middle| \forall n\in\mathbb{N}: \left(f(n)\subseteq f(n+1)\right)\wedge\left(f(n)\neq f(n+1)\right)\right\}$.
האם יש איבר קטן ביותר ב D? (לפי היחס R שהוגדר קודם)
אם כן, מצאו אותו והוכיחו שהוא הקטן ביותר.
אם לא, הוכיחו שאין איבר קטן ביותר.

פתרון שאלה 2

<u>סעיף א</u>

רפלקסיביות

תהי $f:\mathbb{N}\to P(\mathbb{N})$ פונקציה, כלומר חד ערכית. לכל n טבעי $f(n)=f(n)$ ז"א $f(n)\subseteq f(n)$. מהגדרת היחס R נקבל fRf.

אנטי סימטריות

תהיינה f,g פונקציות כך ש $gRf\wedge fRg$ כלומר: לכל n טבעי $g(n)\subseteq f(n)\wedge f(n)\subseteq g(n)$.

סה"כ נקבל שלכל n טבעי $f(n)=g(n)$.

לשתי הפונקציות אותו תחום, אותו טווח ואותו גרף ז"א $f=g$.

טרנזטיביות

תהיינה f,g,h פונקציות כך ש $fRg\wedge gRh$

כלומר: לכל n טבעי $f(n)\subseteq h(n)\leftarrow f(n)\subseteq g(n)\wedge g(n)\subseteq h(n)$.

סה"כ נקבל שלכל n טבעי $f(n)\subseteq h(n)$ ז"א fRh.

<u>סעיף ב</u>

היחס הוא לא יחס סדר מלא כי הוא לא משווה.

תהי $f:\mathbb{N}\to P(\mathbb{N})$ פונקציה המוגדרת ע"י $f(n)=\begin{cases}\{1,2\} & n=1\\ \{n\} & n\neq 1\end{cases}$.

תהי $g:\mathbb{N}\to P(\mathbb{N})$ פונקציה המוגדרת ע"י $g(n)=\begin{cases}\{2,3\} & n=1\\ \{n\} & n\neq 1\end{cases}$.

$f,g\in A$. $f(1)\not\subset g(1)$ ולכן $(f,g)\notin R$. $g(1)\not\subset f(1)$ ולכן $(g,f)\notin R$.

קיבלנו ש $(f,g)\notin R$ וגם $(g,f)\notin R$ אבל הפונקציות שונות.

<u>סעיף ג</u>

כן, הפונקציה הקבועה $f(n)=\mathbb{N}$.

נוכיח שהוא איבר גדול ביותר. תהיי $g:\mathbb{N}\to P(\mathbb{N})$ לכל $n\in\mathbb{N}$ נקבל ש $g(n)\in P(\mathbb{N})$ ועל פי הגדרת קבוצת החזקה $g(n)\subseteq\mathbb{N}=f(n)$. לכל n טבעי נקבל ש $g(n)\subseteq f(n)$ כלומר gRf

<u>סעיף ד</u>

יש פונקציה שהיא איבר קטן ביותר בקבוצה. לכל n טבעי $f(n)=\{n\}$.

לכל $n\in\mathbb{N}$ נקבל ש $n\in\{n\}$ כלומר $n\in f(n)$, ולכן $f\in X$

תהיי $g\in X$. נתון שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $n\in g(n)$ ולכן $f(n)=\{n\}\subseteq g(n)$. כלומר fRg .

<u>סעיף ה</u>

אין איבר קטן ביותר. נוכיח את זה על ידי כך שנמצא שני איברים מינימליים שונים (הרי אם יש קטן ביותר, הוא מינימלי יחיד).

נביט בפונקציה $f(n)=\begin{cases}\varnothing & n=1\\ \{1,\dots,n-1\} & n>1\end{cases}$ ונוכיח שהיא מינימלית ב D .

אם gRf אזי $g(1)\subseteq f(1)$ ולכן $g(1)=\varnothing=f(1)$.

כמו כן, $g(2)\subseteq f(2)=\{1\}$ כיוון ש $g(2)\neq g(1)=\varnothing$ נובע ש $g(2)=\{1\}$, נמשיך הלאה באופן דומה ונקבל כי $f=g$ (אפשר לכתוב הוכחה פורמלית באינדוקציה, אבל לא חייב).

אבל באותה מידה גם הפונקציה $h(n)=\begin{cases}\varnothing & n=1\\ \{2,\dots,n\} & n>1\end{cases}$ מינימלית ב D , ולכן אין איבר קטן ביותר בקבוצה.

<u>שאלה 3 (22 נקודות)</u>

א. (10 נק') תהיינה $f:B\to C$, $g:A\to B$ פונקציות.
   i. הוכיחו שאם $f\circ g$ חח"ע, אז g חח"ע.
   ii. הוכיחו שאם $f\circ g$ על, אז f היא על.

ב. (12 נק') תהיי $f:A\to B$ פונקציה. נאמר ש f מצטמצמת משמאל אם ורק אם לכל שתי פונקציות $g,h:C\to A$ מתקיים: $f\circ g=f\circ h\Rightarrow g=h$.
   הוכיחו ש f מצטמצמת משמאל אם ורק אם f חח"ע.
   שימו לב: $f\circ g=f\circ h\Rightarrow g=h$ נכון לכל קבוצה C ולכל שתי פונקציות $g,h:C\to A$

<u>פתרון שאלה 3</u>

<u>סעיף א1</u>

יהיו $x_1,x_2\in A$ כך ש $g(x_1)=g(x_2)$ מכיוון ש f היא פונקציה אז $f(g(x_1))=f(g(x_2))$ ועל פי הגדרת ההרכבה נקבל ש $(f\circ g)(x_1)=f(g(x_1))=f(g(x_2))=(f\circ g)(x_2)$

ומכיוון ש $f\circ g$ היא פונקציה חח"ע אז $x_1=x_2$.

<u>סעיף א2</u>

יהי $c\in C$ מכיוון ש $f\circ g$ היא על אז קיים $a\in A$ כך ש $(f\circ g)(a)=c$ ועל פי הגדרת ההרכבה $f(g(a))=c$ שימו לב: $g(a)\in B$ ולכן עבור $c\in C$ כלשהו קיים $g(a)=b\in B$ כך ש $f(b)=c$.

<u>סעיף ב</u>

$\Leftarrow$

תהיינה $g,h:C\to A$ כלשהן.

נניח ש f חח"ע ו- $f\circ g=f\circ h$.

$f\circ g=f\circ h$ ולכן לכל $x\in C$ מתקיים $f\left(g\left(x\right)\right)=f\left(h\left(x\right)\right)$ הפונקציה חח"ע ולכן $g\left(x\right)=h\left(x\right)$.

$\Rightarrow$

נתון $f\circ g=f\circ h\Rightarrow g=h$ צ"ל f חח"ע.

נניח בשלילה ש f לא חח"ע. כלומר: קיימים $x_1,x_2\in A$ כך ש $x_1\neq x_2$ אבל $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$.

תהי $g:C=\{x_1,x_2\}\to A$ המקיימת $g\left(x_1\right)=x_1,g\left(x_2\right)=x_2$

ותהי $h:C=\{x_1,x_2\}\to A$ המקיימת $h\left(x_1\right)=x_2,h\left(x_2\right)=x_1$

$$f\circ g\left(x_1\right)=f\left(g\left(x_1\right)\right)=f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)=f\left(h\left(x_1\right)\right)=f\circ h\left(x_1\right)$$

$$f\circ g\left(x_2\right)=f\left(g\left(x_2\right)\right)=f\left(x_2\right)=f\left(x_1\right)=f\left(h\left(x_2\right)\right)=f\circ h\left(x_2\right)$$

קיבלנו ש $f\circ g=f\circ h$ אבל $g\neq h$.

<u>שאלה 4 (24 נקודות)</u>

א. (12 נק') קבעו והוכיחו לכל קבוצה אם היא מעוצמת $\aleph_0,\aleph,2^{\aleph}$ או סופית. אם היא סופית רשמו את מספר האיברים בקבוצה.

i. $A=\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$

ii. $B\subseteq\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ אוסף הפונקציות <u>העל</u> מהטבעיים לקבוצה $\{0,1\}$.

iii. $C\subseteq P\left(\mathbb{N}\right)^{\mathbb{Q}}$ אוסף הפונקציות ההפיכות מהרציונליים לקבוצת החזקה של הטבעיים.

ב. (12 נק') תהי $D\subseteq\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ אוסף הפונקציות <u>החח"ע</u> מהטבעיים לטבעיים.

i. מצאו פונקציה חח"ע $h:\{0,1\}^{\mathbb{N}}\to D$ והוכיחו שהיא אכן חח"ע.

ii. היעזרו בסעיף הקודם והוכיחו ש $\left|D\right|=\aleph$.

<u>פתרון שאלה 4</u>

<u>סעיף א1</u>

$$\left|\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}\right|=\aleph_0^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}=\aleph\leftarrow\left|\mathbb{Q}\right|=\aleph_0,\left|\mathbb{N}\right|=\aleph_0$$

<u>סעיף א2</u>

קיימות רק שתי פונקציות לא על מהטבעיים לקבוצה $\{0,1\}$. הורדת מספר סופי של איברים מקבוצה אינסופית לא משנה את עוצמת הקבוצה. $\aleph=2^{\aleph_0}=\left|\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right|=\left|B\right|$.

<u>סעיף א3</u>

$\left|\mathbb{N}\right|=\left|\mathbb{Q}\right|$ ולכן $\left|\mathbb{N}\right|\neq\left|P\left(\mathbb{Q}\right)\right|$ אין פונקציה חח"ע ועל (כלומר: הפיכה) מהרציונליים לקבוצה $P\left(\mathbb{N}\right)$.

התשובה היא אפס.

<u>סעיף ב1</u>

נבנה פונקציה $h:\{0,1\}^{\mathbb{N}} \to D$ המוגדרת ע"י $h(f)=g$ כאשר $g(n)=\begin{cases} 2n-1 & f(n)=0 \\ 2n & f(n)=1 \end{cases}$

g פונקציה חח"ע ולכן $g \in D$.

נוכיח ש h חח"ע. נניח ש $f_1, f_2 \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ פונקציות שונות. כלומר: קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש $f_1(n) \neq f_2(n)$. נניח ב.ה.ג.כ ש $f_1(n)=0$ ו $f_2(n)=1$.

$h(f_1)$ היא פונקציה ומתקיים $h(f_1)(n)=2n-1$.

$h(f_2)$ היא פונקציה ומתקיים $h(f_2)(n)=2n$.

קיבלנו פונקציות שונות, ולכן $h(f_1) \neq h(f_2)$

<u>סעיף ב2</u>

h חח"ע ולכן $\left|\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right| \le |D|$.

סה"כ נקבל $\aleph = \left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right| \ge |D| \ge \left|\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right| \ge 2^{\aleph_0} = \aleph$.

סה"כ $|D| = \aleph$.

<u>שאלה 5 (22 נקודות)</u>

א. (10 נק') יהי גרף G קשיר עם $|V| = n \ge 2$ קדקודים, כך שלכל צלע בגרף אם נסיר אותה הגרף לא יהיה קשיר.
הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת שכמות הצלעות היא $|E| = n-1$.

ב. (12 נק') תהי פונקציה $f:\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ הוכיחו או הפריכו:

i. לכל $A \subseteq \mathbb{N}$ מתקיים כי $\mathbb{N} \setminus A \subseteq f\left[\mathbb{N} \setminus f^{-1}[A]\right]$.

ii. לכל $A \subseteq \mathbb{N}$ מתקיים כי $\mathbb{N} \setminus A \supseteq f\left[\mathbb{N} \setminus f^{-1}[A]\right]$

<u>פתרון שאלה 5</u>

<u>סעיף א</u>

בסיס האינדוקציה: $|V| = 2$. על מנת שהגרף יהיה קשיר, יש צלע אחת המחברת בין הקודקודים.

אכן $|E| = 2-1 = 1$.

יהי n עבורו הטענה נכונה, צ"ל את הטענה עבור n+1.

יהי גרף קשיר עם n+1 קודקודים כך שכל צלע שנסיר הוא יהיה לא קשיר.

ברור שבגרף אין צלע מדרגה אפס, אחרת הוא אינו קשיר.

כמו כן, אם דרגות כל הקודקודים גדולות או שוות ל2, סימן שיש מעגל בגרף. ממעגל זה ניתן להסיר צלע והגרף ישאר קשיר.

לכן קיים קודקוד מדרגה 1, ניתן להסיר אותו ואת הצלע שלו.

ישאר גרף עם n קודקודים, קשיר, וכל צלע שנסיר ממנו תהפוך את הגרף ללא קשיר, לכן לפי הנחת האינדוקציה יש לו n-1 צלעות, וסה"כ לגרף המקורי יש n צלעות.

סעיף ב1

נכון,

$y \in f\left[\mathbb{N} \setminus f^{-1}\left[A\right]\right]$ ז"א קיים $x \notin f^{-1}\left[A\right]$ כך ש $f\left(x\right) = y$ ואז נקבל שאם $y \in A$ אז $x \in f^{-1}\left[A\right]$ ז"א $y \notin A$ ולכן $y \in \mathbb{N} \setminus A$.

סעיף ב2

דוגמה נגדית

ניקח $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ מוגדרת ע"י הפונקציה הקבועה $f\left(n\right) = 1$. נסמן $A = \left\{1\right\}$.

$f^{-1}\left[A\right] = \mathbb{N}$. $f\left[\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}\right] = \varnothing$ והקבוצה $\mathbb{N} \setminus A$ שונה מקבוצה ריקה.