הרצאה 5

תזכורת: נזכיר ש יחס : $R\subseteq A\times A$

יחס״ק : רפל', סימ', טרנז'

מח״ש : $[a]_R=\{x\in A \mid xRa\}$

קב' המנה : $A/R=\{[a]_R \mid a\in A\}$

(modulo)

הוכחנו: מח״ש שונות - זרות

איחודן $= A$

A

דוגמאות נוספות:

① $A=\mathbb{N}$, נגדיר R:

$mRn \iff$ ל-m ול-n בדיוק אותם מחלקים ראשוניים

$$[2]_R=\{2,2^2,2^3,2^4,\dots\}$$

בדומה:

$$[p]_R=\{p,p^2,p^3,\dots\}$$

לכל ראשוני p.

$$[6]_R=\{6,12,18,24,36,\dots\}$$

$$\mathbb{N}/_R = \{ [p_1 p_2 \cdots p_k]_R \mid \{p_1,\dots,p_k\} \text{ ראשוניים (שונים)} \}$$

מח"ש של המספר

$p_1\cdots p_k$

אם כבר נניח:

$$\{p_1,\dots,p_k\} \neq \{q_1,\dots,q_l\}$$

p $\qquad \cancel{p}$

לכן $p_1\cdots p_k \cancel{R}\, q_1\cdots q_l$.

יהי $n\in\mathbb{N}$, נפרק את מחלקיו הראשוניים $\{p_1,\dots,p_k\}$, מתקיים:

$$[n]_R = [p_1\cdots p_k]_R.$$

② $A=P(\mathbb{N})$ (=אוסף תתי-הקבוצות של $\mathbb{N}$).

נגדיר יחס:

$XRY \iff$ הקבוצה $X\Delta Y$ סופית

מדוע זה יחס? (תרגיל לא להגשה)

- $X\Delta X=\emptyset$, בוודאי סופית
- $X\Delta Y = Y\Delta X$
- $(X\Delta Y)\Delta(Y\Delta Z)=X\Delta Z$

* מי מח"ש של $\emptyset$ לגבי R?

$$[\emptyset]_R = \{X\in P(\mathbb{N}) \mid X\Delta\emptyset \text{ סופית}\} =$$
$$= \{X\in P(\mathbb{N}) \mid X \text{ סופית}\}$$

③ $A=\mathbb{R}^2$, נגדיר יחס:

$$(x_1,y_1)R(x_2,y_2) \iff x_1y_1 = x_2y_2$$

ג) טרנ׳ - נראה טרנז׳ -

$$(x_1,y_1)R(x_2,y_2) \Rightarrow x_1y_1 = x_2y_2$$
$$(x_2,y_2)R(x_3,y_3) \Rightarrow x_2y_2 = x_3y_3$$
$$\Rightarrow x_1y_1 = x_3y_3 \Rightarrow (x_1,y_1)R(x_3,y_3)$$

מחל׳? שים לב שאני הגדרים תלויים כל אחד בנק׳ אחרת.

לכל $c\in\mathbb{R}$. ניתן להסתכל ב-

$$\left(\mathbb{R}^2 \supseteq\right) \{(x,y) \mid xy = c\} \ni (1,c)$$

זו מחל׳!

נניח: $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \Leftarrow$

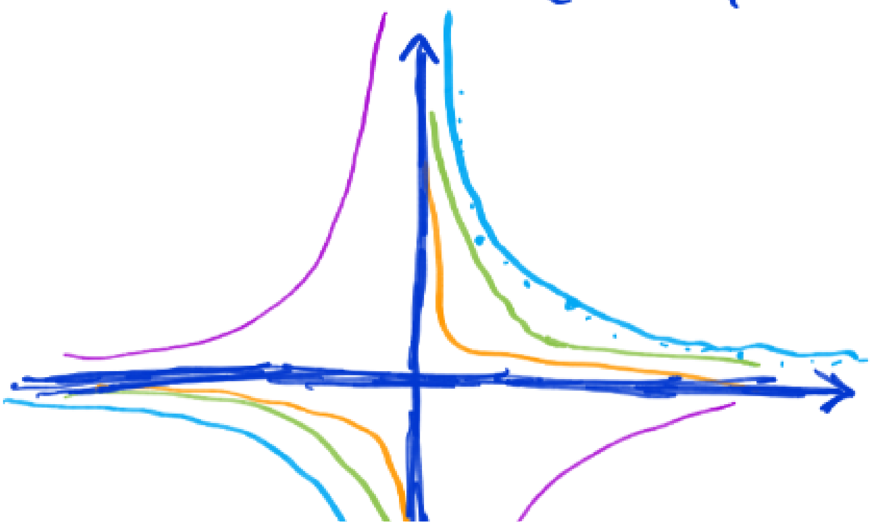
$$\left.\begin{matrix} x_1y_1=c \\ x_2y_2=c \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_1y_1 = x_2y_2 \Rightarrow (x_1,y_1)R(x_2,y_2)$$

בכיוון ההפוך, אם $(x_1,y_1)R(x_2,y_2)$ אז:

$$c := x_1y_1 = x_2y_2$$

לכן:

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \{(x,y) \mid xy=c\}$$



(1,2)

העקומות הן מחלקות השקילות.

$$\mathbb{R}^2/R = \{ [(1,c)] \mid c \in \mathbb{R} \}$$

תהי $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ אזי:

$$(1, xy) R (x,y)$$

ולכן זהו אוסף מלא של נציגים למח"ש.

(גם אין כפל נציגים: $c=d \Leftarrow (1,c)R(1,d)$.)

באופן כללי, לכל יח"ש R יש:

(1) $[a]_R = [b]_R$ או $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$

(2) $$\bigcup_{[a]_R \in A/R} [a] = A$$

זה נקרא <u>חלוקה</u>.

<u>הגדרה</u>: <u>חלוקה</u> של קב' A היא אוסף תת-קב' של A: $\{A_i\}_{i\in I}$ כך ש-

(1) $$\bigcup_{i\in I} A_i = A$$

(2) $A_i \neq \emptyset \quad \forall i\in I$

(3) $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i\neq j$

דוגמה:

$A = \{1,2,3\}$

דוגמה חלוקה: $\{\{1\},\{2,3\}\}$

לא חלוקה: $\{\{1,2\},\{2,3\}\}$ (לא זרות).

הגדרה: תהיו $\{A_i\}_{i\in I}$ חלוקה של קב' A.

היחס המושרה מהחלוקה הוא:

$$aRb \iff \exists i\in I: a\in A_i,\ b\in A_i$$

טענה: א) לכל חלוקה, היחס המושרה ממנה הוא יח"ש ;
ב) כל יח"ש מושרה מחלוקה.

הוכחה: נתחיל מסעיף ב):
כל יח"ש מושרה מחלוקה למח"ש:

$\{[a]_R \mid a\in A\}$ חלוקה.

מהו היחס המושרה מחלוקה זו? נסמן $\tilde{R}$:

aRb $\Leftrightarrow$ | a,b שייכים לאותה $\Leftrightarrow$ aKb

נקרא לזה K:

נראה כי לכל חלוקה, היחס המושרה הוא אכן יח"ש.

תהא $\{A_i\}_{i\in I}$ חלוקה של קב' A. יהי S היחס המושרה:

$$aSb \iff \exists i\in I:\ a,b\in A_i$$

1) רפ': $\{A_i\}_{i\in I}$ חלוקה ולכן $A=\bigcup_{i\in I} A_i$, כלומר לכל $a\in A$ קיים $i\in I$ כך ש-$a\in A_i$.

בפרט, aSa.

2) סימ': $aSb \iff \exists i\in I:\ a,b\in A_i \iff bSa$.

3) טרנז':

$$aSb \Rightarrow \exists i\in I:\ a,b\in A_i$$
$$bSc \Rightarrow \exists j\in I:\ b,c\in A_j$$

נקבל כי $b\in A_i\cap A_j$, אבל מאחר ש-$\{A_i\}_{i\in I}$ חלוקה, לכל $i\neq j$, $A_i\cap A_j=\emptyset$. נובע ש-$i=j$. לכן:

$(i=j)$ $\exists i\in I:\ a,c\in A_i$

ולכן: aSc. לכן S יח"ש.

מ.ש.ל.

תרגיל לדוגמה:

כמה יחסי שקילות שונים ניתן להגדיר על קבוצה בגודל 3?

פתרון: נספור חלוקות של קב' בגודל 3.

$A = \{1,2,3\}$

כל חלוקה של A יש $1 / 2 / 3$ קב'.

אם יש חלוקה קב' אחת: $\{\{1,2,3\}\}$

אם יש 3 קב': $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$

אם יש 2 קב': $\{\{a,b\},\{c\}\}$

$\{\{1,2,3\}\}$

$\{\{1,2\},\{3\}\}, \quad \{\{1,3\},\{2\}\}, \quad \{\{2,3\},\{1\}\}$

$\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$

סה"כ 5 חלוקות, לכן 5 יחס"ש.

הערה: אמרנו שחלוקה משרה יחס"ש, וכל יחס"ש משרה חלוקה. נכתוב מפורשות את היחס"ש המתאים לחלוקה:

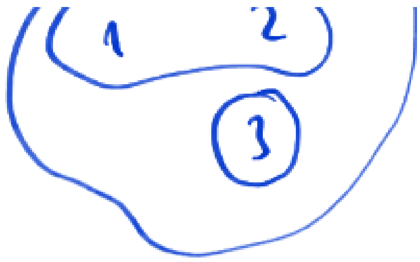
$\{\{1,2\},\{3\}\}$ חלוקה

$R \subseteq \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$

$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$ היחס"ש המתאים לחלוקה

$(2,3) \notin R \longrightarrow$ כי 2 ו-3 נמצאים במחלקות שונות בחלוקה הנתונה.

A



תרגיל לדוגמה:

יהא A קבוצה, ויהיו R,S יח״ש של A.

① האם $R\cap S$ יח״ש?

② האם $R\cup S$ יח״ש?

פתרון:

$$R,S \subseteq A\times A$$

$$R\cup S,\ R\cap S \subseteq A\times A$$

① הוכחה:

- רפל׳: יהי $a\in A$, אזי $aRa,\ aSa$ כי R,S יח״ש. לכן כי $(a,a)\in R\cap S$.

- סימ׳: יהיו $a,b\in A$, אזי אם $(a,b)\in R\cap S$

נקבל:

$$(a,b)\in R \xRightarrow{R\ \text{סימ׳}} (b,a)\in R$$

$$(a,b)\in S \xRightarrow{S\ \text{סימ׳}} (b,a)\in S$$

לכן: $(b,a)\in R\cap S$, לכן $R\cap S$ סימ׳.

- טרנז׳: יהיו $a,b,c\in A$ אם:

$$(a,b)\in R\cap S$$

$$(b,c)\in R\cap S$$

R יחס טרנז׳ ולכן $(a,c)\in R$,
S יחס טרנז׳ ולכן $(a,c)\in S$.

לכן: $(a,c)\in R\cap S$, כנדרש.

② **הפרכה** - דוגמה נגדית: $A=\{1,2,3\}$

יהי R היחס המושרה מהחלוקה $\{\{1\},\{2,3\}\}$

$R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(2,3),(3,2)\}$

יהי S היחס המושרה מהחלוקה $\{\{1,2\},\{3\}\}$

$S=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$

נשים לב כי $(1,2),(2,3)\in R\cup S$

אך $(1,3)\notin R\cup S$, לכן $R\cup S$ אינו טרנז׳.

מ.ש.ל.

יחסי סדר

A קבוצה, $R\subseteq A\times A$ יחס.

הגדרה: נאמר כי R יחס סדר חלקי אם R:

① רפלקסיבי
② טרנזיטיבי
③ אנטי-סימטרי: $xRy,\ yRx \Longrightarrow x=y$

אומרים כי (A,R) קבוצה סדורה חלקית (קס״ח).

<u>הערה/סימון:</u> נהוג לסמן יחס סדר חלקי ב- $\leq$ (לאו דווקא אותו "$\leq$" של המספרים הממשיים!), כך

<u>דוגמאות:</u>

① $(\mathbb{R}, \leq)$ הממשיים עם יחס הסדר החלקי "הרגיל"

$$(1.789 \leq 2.315\ldots)$$

$$\begin{cases} \cdot\ r \leq r \\ \cdot\ r \leq s \leq t \Rightarrow r \leq t \\ \cdot\ r \leq s,\ s \leq r \Rightarrow r = s \end{cases}$$

② $(\mathbb{N}, |)$ הטבעיים עם יחס החלוקה.

$$m|n \iff \exists q \in \mathbb{N}: \quad m \cdot q = n$$

$$\begin{cases} \cdot\ n|n & (n \cdot 1 = n) \\ \cdot\ n|t,\ t|k & \exists q_1: n q_1 = t,\ \exists q_2: t q_2 = k \\ & \Rightarrow n(q_1 q_2) = k \Rightarrow n|k \\ \cdot\ n|m,\ m|n & \exists q_1, q_2 \in \mathbb{N}: n q_1 = m \\ & \qquad m q_2 = n \\ & \Rightarrow n q_1 q_2 = n \Rightarrow q_1 q_2 = 1 \Rightarrow \\ & \Rightarrow q_1 = q_2 = 1 \Rightarrow n = m \end{cases}$$

* $(\mathbb{Z}, |)$? לא אנטי-סימטרי: $2|-2,\ -2|2$.

③ תהא X קבוצה (כלשהי), אזי:

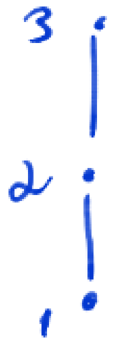
$(P(X), \subseteq)$ הינו קס"ח.

$$\begin{cases} \cdot\ A \subseteq A \\ \cdot\ A \subseteq B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C \end{cases}$$

1. $A \subseteq B, B \subseteq A \Rightarrow A = B$

<u>דוגמאות הסדר:</u>

① $(\{1,2,3\}, \leq)$:

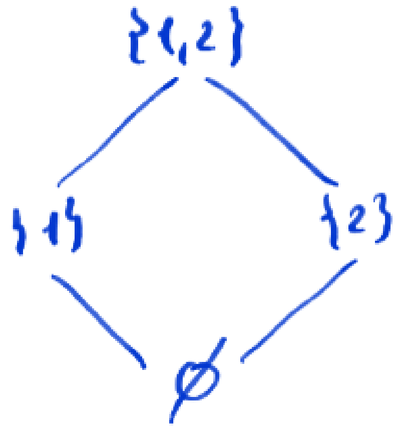


② $(\{x,y,z\}, R)$

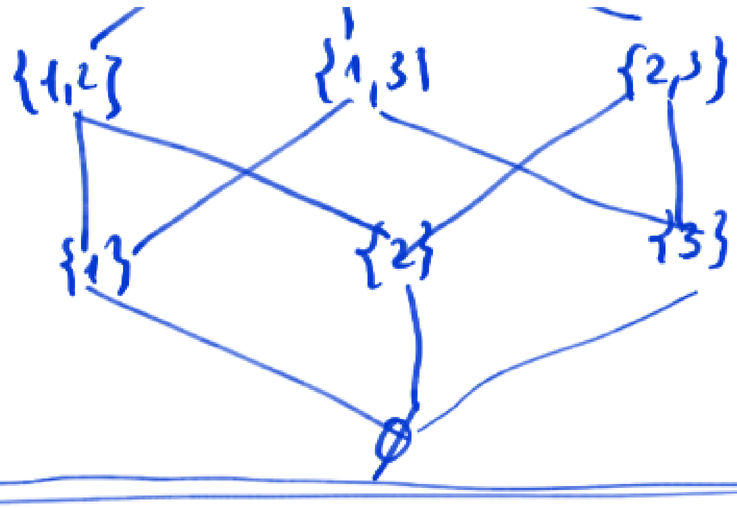
$R = \{(x,x), (y,y), (z,z), (y,z)\}$

אנו כותבים את איברי הקב׳ ומותחים קו בין איברים שמקיימים ביניהם היחס, תוך שאנו מזניחים את מה שנובע מרפלקסיביות וטרנזיטיביות.

③ $\underline{(P(\{1,2\}), \subseteq)}$:



④ $\underline{(P(\{1,2,3\}), \subseteq)}$:



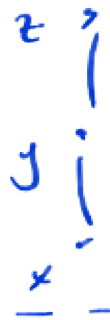
$x \leq x$
$y \leq y$
$z \leq z$

רפלקסיבי
אנטיסי'
טרנזיטיבי

$\{x, y, z\}$

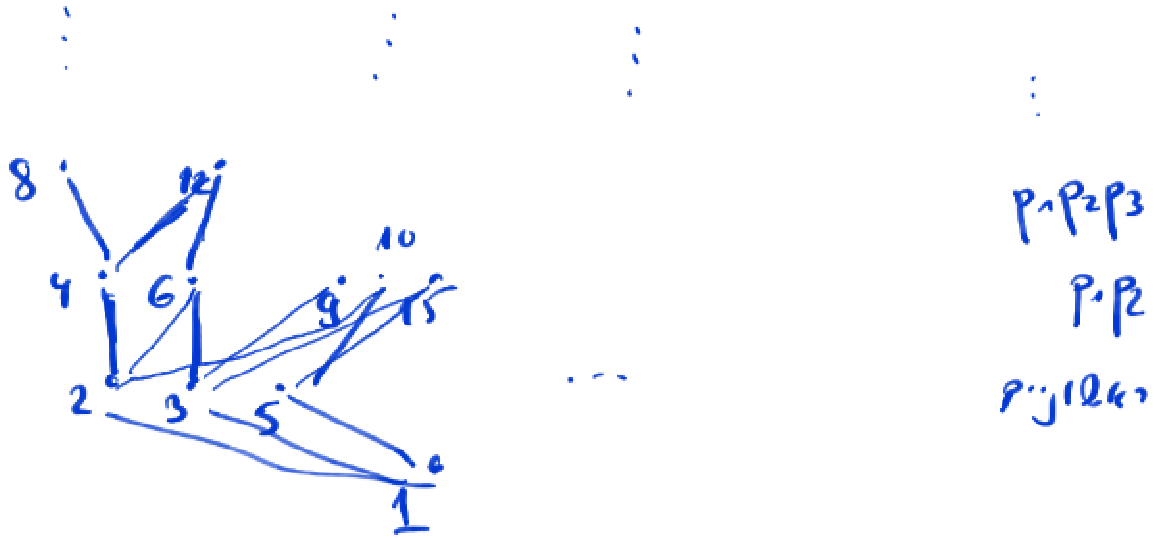
$R = \{(x,x), (y,y), (z,z)\}$

$S = \{(x,x), (y,y), (z,z), (x,y), (y,z), (x,z)\}$



$T = \{(x,x), (y,y), (z,z), (x,y)\}$

⑤ $(\mathbb{N}, |)$ קס"ח. דיאגרמת הסה:



הגדרות: יהי $(X,\le)$ קס"ח ויהי $A\subseteq X$ תת"ק.

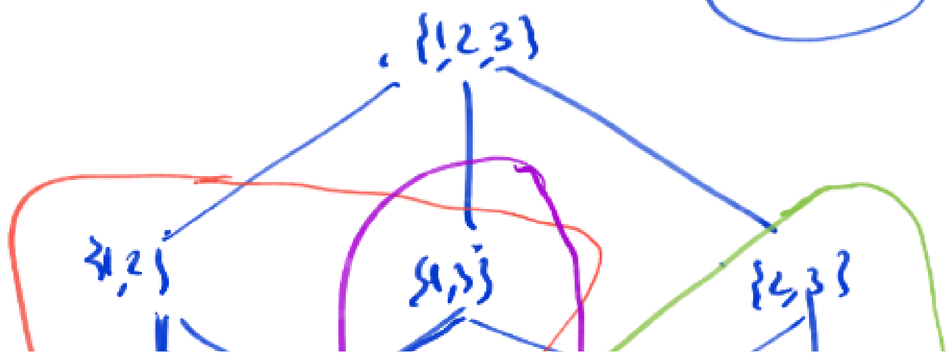
① נאמר כי $a\in A$ הוא מקסימלי ב-A אם:

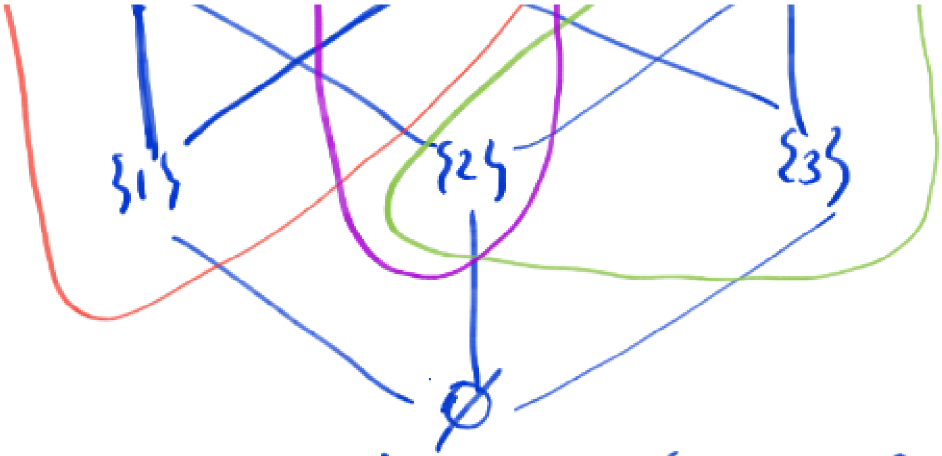
$$\forall b\in A,\quad a\le b \Rightarrow a=b$$

② נאמר כי $a\in A$ הוא מינימלי ב-A אם:

$$\forall b\in A,\quad b\le a \Rightarrow a=b$$

דוגמה: $X = (P(\{1,2,3\}),\subseteq)$.





$X = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1\}\} \subseteq P(\{1,2,3\}) \; (= X)$

איברים מקסימליים: $\{1,2\}, \; \{1,3\}$

איבר מינימלי אחד: $\{1\}$

$Y = \{\{2,3\}, \{2\}, \{3\}\}$

איברים מקסימליים: $\{2,3\}$

איברים מינימליים: $\{2\}, \; \{3\}$

> אזהרה: מקסימלי = אינו קטן-שווה ממישהו שאינו הוא עצמו (בקבוצה המדוברת)
> יתכנו כמה מקסימליים!
> [כנ"ל מינימליים.]

$Z = \{\{2\}, \{1,3\}\}$

איברים מקסימליים: $\{2\}, \; \{1,3\}$

איברים מינימליים: $\{2\}, \; \{1,3\}$

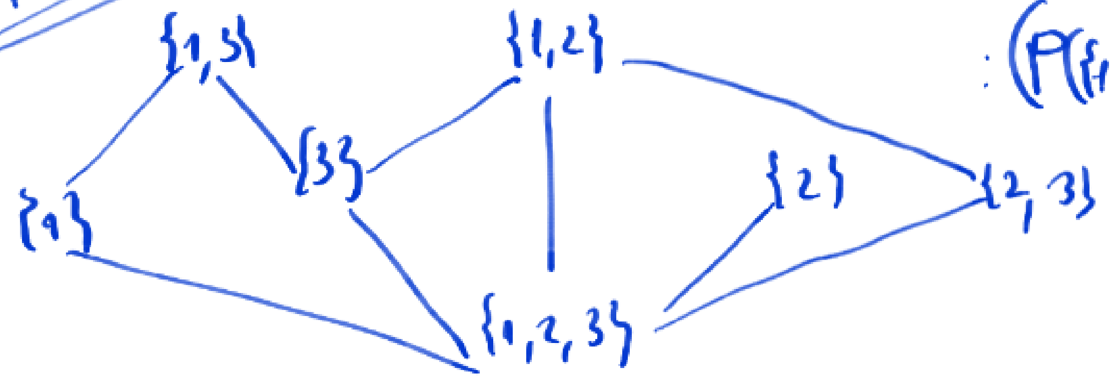
לפי ההגדרה של $\subseteq$:
$\{2\} \nsubseteq \{1,3\}$
$\{1,3\} \nsubseteq \{2\}$

ולכן בקבוצה Z אין מישהו שקטן-שווה מ- $\{1,3\}$ ושונה ממנו, וכנ"ל על $\{2\}$! וכנ"ל {גדול-שווה}...

~~דוגמה ליחס סדר חלקי תחום על $P(\{1,2,3\})$~~

ניתן להגדיר יחס סדר שונה $\supseteq$:

$(P(\{1,2,3\}), \leq)$:



הערה: על קב' A ניתן להגדיר, יחס סדר חלקי R לפי:

$$R = \{(a,a) \mid a \in A\}$$

בהתאם ליחס זה, כל איבר A "מינימלי" וכולם גם "מקסימלי".

הגדרות: יהא $(X, \leq)$ קס"ח ותהא $A \subseteq X$ תת-קב'.

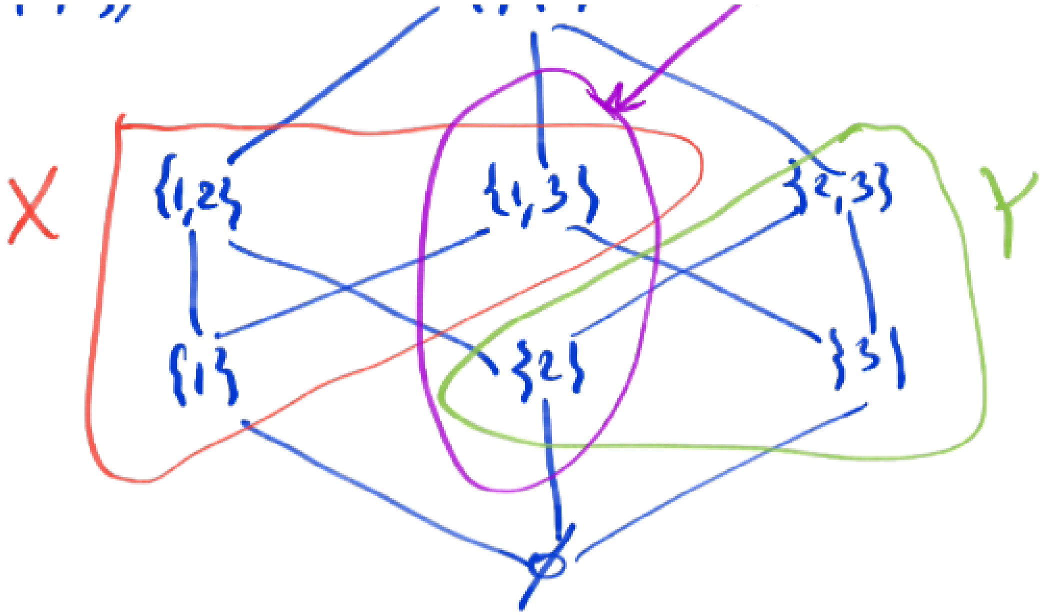
① נאמר כי $a \in A$ הוא גדול ביותר ב- A אם: greatest

$$\forall b \in A : \quad b \leq a$$

② נאמר כי $a \in A$ הוא קטן ביותר ב- A אם: least

$$\forall b \in A : \quad a \leq b \ .$$

דוגמה: Z $\{1,2,3\}$ $P(\{1,2,3\})$



• האם ב-X יש <u>גדול ביותר</u>? לא!
האם ב-X יש <u>קטן ביותר</u>? כן: $\{1\}$.

• ב-Y: יש <u>גדול ביותר</u>: $\{2,3\}$
<u>אין קטן ביותר</u>

• ב-Z: שני האיברים מקס' שניהם מינ', אין גדול ביותר ואין קטן ביותר.

• דוגמה לקב' עם גדול ביותר ועם קטן ביותר: $\{\emptyset, \{2\}\}$.

<u>טענה</u>: תהי $(X,\leq)$ קס"ח ו-$\emptyset \neq A \subseteq X$ תת-קב' <u>סופית</u>. אז ב-A קיים מקסימלי (לפחות אחד) ומינימלי (לפחות אחד).

<u>הוכחה</u>: באינדוקציה על הגודל של A.

<u>$|A|=1$</u>: $A=\{a\}$, ברור כי הוא מקס' ומינ'.

(ועבור $b\in A$, אם $a\leq b$ אז $b=a$...)

$|A|=n+1$: נבחר $a\in A$ שרירותי. נפצל למקרים:

מקרה 1: a מקס' ב-A. ואז סיימנו.

מקרה 2: a אינו מקס' ב-A.

נתבונן בקב' $B:=A\setminus\{a\}$, גודלה n

ולכן מהנחת האינדוקציה יש בה מקס' b ב-B.

נראה כי b מקסימלי ב-A:

יהי $x\in A$. צ"ל כי אם $b\leq x$ אז $b=x$.

$x\neq a$: $x\in B$ ולכן $b=x$ מכך ש-b מקס' ב-B.

$x=a$: אם $b\leq x=a$ אז a מקסימלי ב-A, בסתירה להנחת המקרה.

לכן סה"כ הראינו כי b מקס' ב-A. מ.ש.ל.

טענה: תהי $(X,\leq)$ קס"ח ו-$A\subseteq X$ תת' (לאו דווקא סופית).

אם יש ב-A גדול ביותר אזי הוא מקסימלי, והוא המקסימלי היחיד.

[ובדומה: אם יש קטן ביותר, אזי הוא מינימלי, והוא המינימלי היחיד.]

הוכחה: ראשית נראה כי אם יש ב-A גדול ביותר אז הוא מקס'.

נניח $a\in A$ גדול ביותר. נניח בשלילה ש-a אינו מקס':

$$\neg(\forall b\in A: a\leq b \Rightarrow a=b)$$

כלומר:

$$\exists b\in A:\ a\preceq b,\ a\neq b$$

אבל: a גדול ביותר, ובפרט, $b\leq a$.

מאנטי-סימטריות יחס הסדר $\leq$, נקבל $a=b$ בסתירה.

לכן, a מקס'.

כעת נראה ש המקס' יחיד (בהנחה שיש גדול ביותר)

נניח בשלילה. נ' $b\neq a$ מקס'. מאחר ש-a גדול ביותר, מתקיים:

$$b\leq a$$

אך הנחנו ש-b מקסימלי, לכן $b=a$, בסתירה להנחה.

לכן, a המקסימלי היחיד, כנדרש.

מ.ש.ל

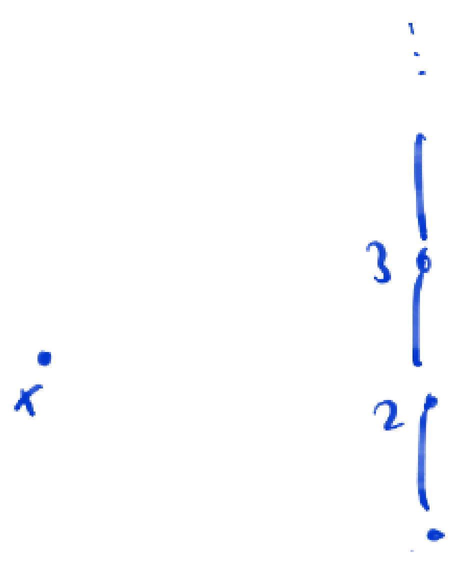
<u>הערה:</u> ייתכן שיש מקסימלי יחיד, אבל אין גדול ביותר.

לדוגמה: ניקח $\mathbb{N}\cup\{x\}$ נגדיר יחס סדר R לפי:

$$R=\left\{(n,m):\ \begin{matrix}n,m\in\mathbb{N}\\ n\leq m\end{matrix}\right\}\cup\{(x,x)\}$$

כמה טבעיים

דיאגרמת הסה -



אבל יש מקס׳ יחיד: x, אך אין גדול ביותר.

<u>דוגמאות נוספות:</u>

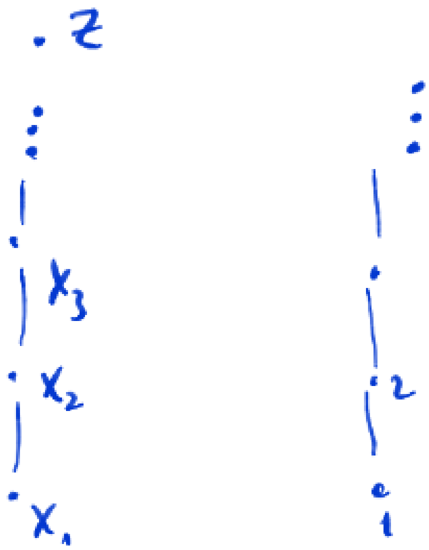
(1) $\{r\in\mathbb{R} \mid 0\le r<1\} = [0,1)$

קטן ביותר: 0, אין מקסימלי (ולכן אין גדול ביותר).

(2) על $\mathbb{N}\cup\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}\cup\{z\}$ נגדיר יחס:

$$R=\{(n,m)\mid n,m\in\mathbb{N}: n\le m\}\cup\{(x_n,x_m)\mid n\le m\}\cup\{(x_n,z)\mid n\in\mathbb{N}\}\cup\{(z,z)\}$$

<u>המחשת הסדר:</u>



מתקיים: z מקסימלי אך לא גדול ביותר.

(3) $\{q\in\mathbb{Q}\mid 0\le q<\sqrt{2}\}$

קטן ביותר: 0, אין מקסימלי (ולכן אין גדול ביותר).

$$1$$
$$1.4$$
$$1.41$$
$$\vdots$$

$$1.4142135\ldots$$

$$1.4$$
$$1.41$$
$$1.414$$
$$1.4142$$
$$1.41421$$
$$\vdots$$

$$(1 = 0.99999\ldots)$$

(4) יהי V מ"ו. נגדיר:

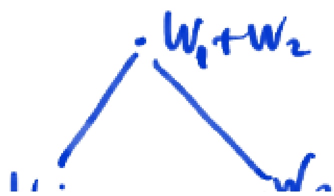
$A = \{\text{אוסף תתי-המרחבים של } V\}$ עם היחס $\leq$ (תמ"ו).

$(A, \leq)$ קס"ח.

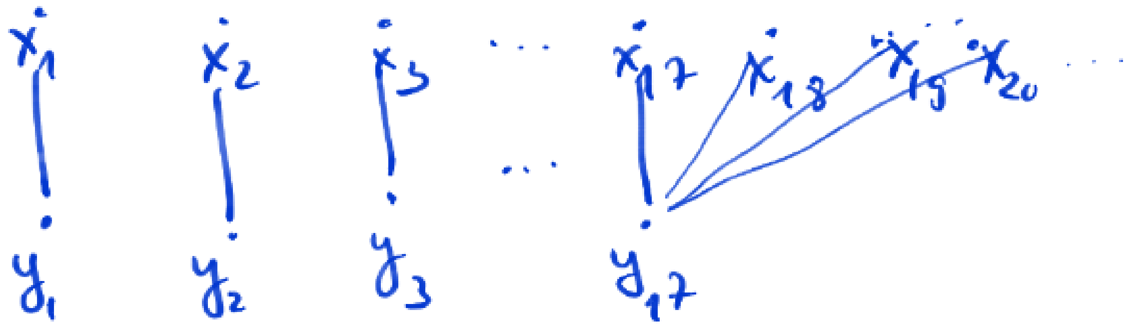
גדול ביותר: V

קטן ביותר: $\{0\}$

$$\{W_1, W_2, \underbrace{W_1+W_2}_{\text{גדול ביותר}}, \underbrace{W_1 \cap W_2}_{\text{קטן ביותר}}\} \subseteq A$$



⑤ דוגמה לקס"ח עם ∞ מקסימליים ו-17 מינימליים:



$R = \{ \dots \}$

⑥ $A \subseteq (P(X), \subseteq)$ $\quad (|X| \geq 2)$

$A = P(X) \setminus \{\emptyset\}$

* תארו את המינימליים. האם יש קטן ביותר?

המינימליים = קב' עם איבר יחיד.

אמרנו שאם יש קטן ביותר, אז הוא המינימלי היחיד.
לכן $|X| \geq 2$, יש $|A| \geq 2$ מינ',
ולכן אין קטן ביותר.

* האם יש גדול ביותר? X עצמה.

⑦ נתונה $(X, \leq)$ שיש בה איבר שהוא גדול
ביותר וגם מינימלי. מה הנכון של X?

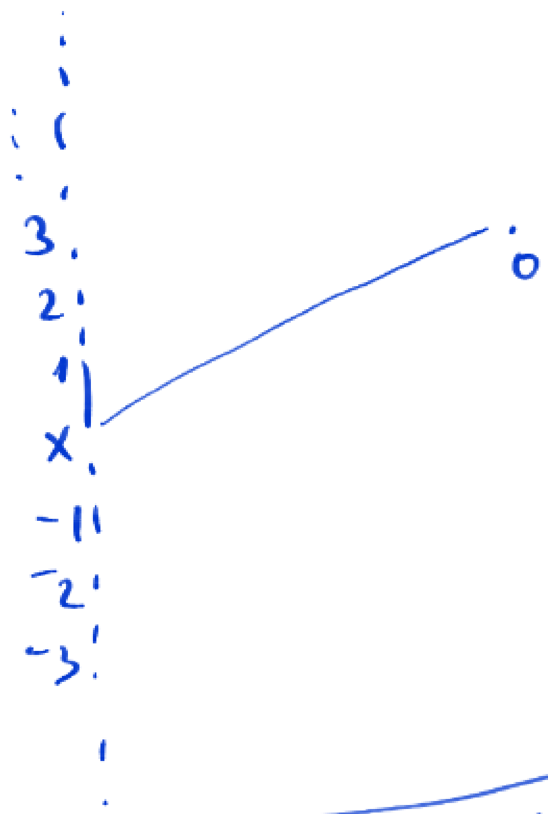
יהי $a\in X$ גדול ביותר שהוא גם מינ'

אז $b\in X$ מתקיים $b\leq a$. מכאן ש-a מינ': $b=a$.

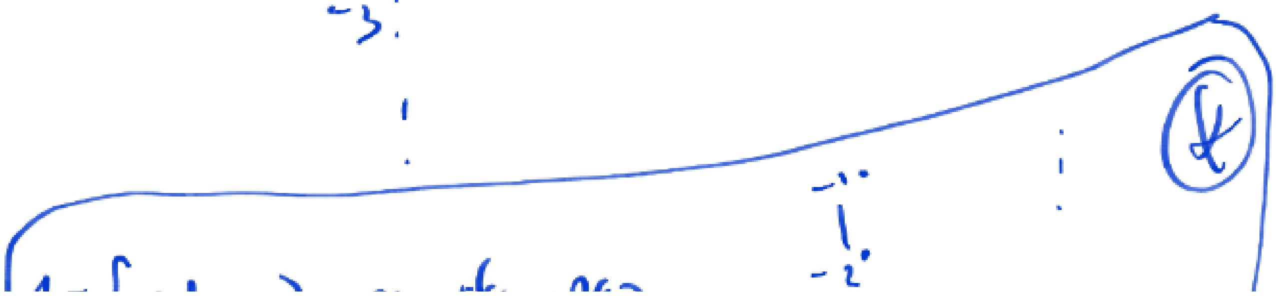
הוכחנו שיש איבר יחיד: $X=\{a\}$.

8 דוגמה לקב' עם מקס' יחיד, מינ' יחיד, שאין ביניהם יחס:

כאן יש מקס' יחיד (n)
יש מינ' יחיד (0)
אך יש ביניהם יחס:
$0\leq n$



9



מקס' יחיד: 1 .

מינ' יחיד: 1 ,

ורק אינם ביחס זה עם זה.

<u>הגדרה פורמלית של יחס זה:</u>

$$X = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

$$R = \{(n,m) \mid \underset{\text{של מס' טבעיים}}{n \le m}\} \cup$$

$$\cup \{(-m,-n) \mid \underset{\text{של מס' טבעיים}}{n \le m}\}$$