פתרון מבחן מועד ב' – 83-112 חדו"א 1 להנדסה – 02/03/23

מרצה: דר' ארז שיינר | משך המבחן: שלוש שעות | חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 20 נק' | ענו על כל השאלות | כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

יש לכתוב את התשובות על גבי טופס המבחן במקום המתאים בלבד. מותר לכתוב משני צידי הדף.

מחברות הטיוטה מושלכות ולא תבדקנה.

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(x)\sin(2x)\cos(3x)\ln(1+4x)}{x-x\cdot\cos(x)}$

$$\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{1}{\cos(x)}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{\sin(2x)}{2x}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\cos(3x)}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{\ln(1+4x)}{4x}}_{\to 1}\cdot\frac{1}{x}\cdot\underbrace{\frac{x^2}{1-\cos(x)}}_{\to 2}\cdot\frac{8x^3}{x^2}=8\cdot 2=16$$

ב. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{(x+1)}}{x+1}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{x+1}}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\underbrace{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}_{\to 1}}\cdot x^x=\{1\cdot\infty^\infty\}=\infty$$

ג. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin(n)+2^n}{3^n}$

$$\frac{\sin(n)+2^n}{3^n}=\frac{\sin(n)}{3^n}+\left(\frac{2}{3}\right)^n=\left\{\frac{\text{חסום}}{\infty}+(\text{קטן מאחד})^\infty\right\}=0$$

2.

א. חשבו את $\int e^{2x}\sin(e^x)\,dx$.

$$\int e^{2x}\sin(e^x)\,dx=\left\{\begin{matrix}t=e^x\\ dt=e^xdx\end{matrix}\right\}=\int t\sin(t)dt=\left\{\begin{matrix}f'=\sin & g=t\\ f=-\cos & g'=1\end{matrix}\right\}=-t\cos(t)+\int\cos(t)\,dt=$$

$$=-t\cos(t)+\sin(t)+C=-e^x\cos(e^x)+\sin(e^x)+C$$

הסבר למעבר הראשון - $e^{2x}=e^xe^x$

ב. חשבו את האינטגרל הבא $\int_0^\infty e^{-2x}dx$.

$$\int_0^\infty e^{-2x}dx=\lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-2x}dx=\lim_{t\to\infty}\left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^t=\lim_{t\to\infty}\left[\frac{e^{-2t}}{-2}-\frac{1}{-2}\right]=\{e^{-\infty}=0\}=\frac{1}{2}$$

3. נביט בפונקציה $f(x) = (x^2+1)\cdot\arctan(x) - x$.

א. הוכיחו כי לכל $a \in \mathbb{R}$ קיים פתרון למשוואה $f(x) = a$.

נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x) = f(x) - a$$

הפונקציה רציפה בכל הממשיים כצירוף של רציפות, נחפש נקודה מעל הציר ונקודה מתחת לציר ואז לפי ערך הביניים סיימנו.

כיוון שאי אפשר להציב נקודות (בגלל a) נחשב גבולות בקצוות ($\pm\infty$)

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty}(x^2+1)\arctan(x) - x - a = \lim_{x\to\infty} \underbrace{x^2}_{\to\infty}\left(\underbrace{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}_{\to 1}\underbrace{\arctan(x)}_{\to\frac{\pi}{2}} \underbrace{-\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}}_{\to 0}\right) = \infty$$

לכן קיימת נקודה מעל הציר.

באופן דומה

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty}(x^2+1)\arctan(x) - x - a = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{x^2}_{\to\infty}\left(\underbrace{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}_{\to 1}\underbrace{\arctan(x)}_{\to-\frac{\pi}{2}} \underbrace{-\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}}_{\to 0}\right) = -\infty$$

לכן קיימת גם נקודה מתחת לציר וסיימנו.

ב. מצאו לכל $a \in \mathbb{R}$ כמה פתרונות יש למשוואה $f(x) = a$.

במקום להעביר אגף ולבנות פונקציה, כיוון שמימין יש רק קבוע, נחקור את הפונקציה f.

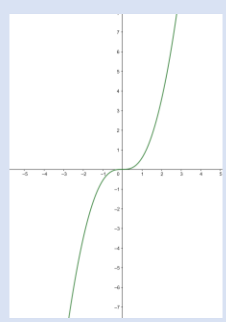
נגזור על מנת למצוא תחומי עלייה וירידה

$$f'(x) = 2x\cdot\arctan(x) + \frac{1+x^2}{1+x^2} - 1 = 2x arctan(x) \geq 0$$

זה תמיד אי שלילי כיוון ש$\arctan(x)$, x שתיהן גדולות או שוות אפס כאשר $x \geq 0$ וקטנות מאפס כאשר $x < 0$

לכן הפונקציה עולה תמיד, ולכן היא חח"ע ולכל a סה"כ יש פתרון יחיד (יחד עם המידע מסעיף א').

שרטוט להמחשה:



4. תהי f פונקציה הגזירה בכל $\mathbb{R}$ כך ש $f(0)=0$.

א. הוכיחו או הפריכו: אם $\lim_{x\to\infty} f'(x)>0$ אזי $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

כיוון שהגבול חיובי קיים $c>0$ כך שהחל משלב מסויים $f'(x)>c$, נסמן שזה בקטע $[a,\infty)$

נעביר אגף ונביט בפונקציה הקדומה

$$f'(x)-c>0$$

$$h(x)=f(x)-cx$$

לכן

$$h'(x)=f'(x)-c>0$$

כלומר h עולה בקטע $[a,\infty)$

כלומר לכל x בקטע

$$h(a)\le h(x)$$

$$h(a)\le f(x)-cx$$

$$f(x)\ge cx+h(a)$$

אגף ימין, כיוון ש$c>0$, שואף לאינסוף כאשר $x\to\infty$

לפי חצי סנדוויץ', סיימנו.

ב. הוכיחו או הפריכו: אם $f'(x)>0$ לכל $x\in\mathbb{R}$ אזי $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

בעצם הנתון הוא שהפונקציה עולה תמיד, האם זה אומר שגבולה הוא אינסוף? ממש לא!

למשל

$$f(x)=\arctan(x)$$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}>0$$

אבל

$$\lim_{x\to\infty}\arctan(x)=\frac{\pi}{2}$$

5. תהי סדרה a_n המקיימת לכל n כי $a_{n+1}=\frac{2}{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{4}}$ וכן $a_1=1$.

א. הוכיחו כי הסדרה מונוטונית עולה.

הפעם כן נשתמש באינדוקציה, למרות שבדר"כ ננסה קודם בלי (הסבר רעיוני- הביטוי $a_{n+1}-a_n$ ממש לא פשוט כאן).

$$a_2=\frac{2}{1+\frac{1}{4}}=\frac{2}{\frac{5}{4}}=\frac{8}{5}>1$$

בדיקה: אכן $a_1<a_2$

יהי n עבורו $a_n<a_{n+1}$

נוכיח כי $a_{n+1}<a_{n+2}$

צ"ל כי

$$\frac{2}{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{4}}<\frac{2}{\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{4}}$$

כעת על מנת לבצע פעולות על אי שיוויונים נוודא כי המכנה חיובי ע"י כך שנוודא שהסדרה חיובית:

באינדוקציה – אכן $a_1>0$ ואם $a_n>0$ נובע כי $a_{n+1}=\frac{2}{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{4}}>0$.

נחזור לאי השיוויון, נצמצם ב2 ונעשה כפל בהצלבה של המכנים ונקבל שצ"ל כי

$$\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{4}<\frac{1}{a_n}+\frac{1}{4}$$

נצמצם ברבע, ושוב נעשה כפל בהצלבה ונקבל שצ"ל כי

$$a_n<a_{n+1}$$

והפלא ופלא זו בדיוק הנחת האינדוקציה.

ב. הוכיחו כי הסדרה a_n מתכנסת וחשבו את גבולה.

נוכיח כי הסדרה חסומה, כיוון שהיא מונוטונית ינבע שהיא מתכנסת לגבול סופי, ונחשבו.

<u>אם</u> הסדרה חסומה, היא מתכנסת לגבול סופי, נסמנו $a_n\to L$

נשאיף את שני צידי נוסחת הנסיגה

$$\lim a_{n+1}=\lim\frac{2}{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{4}}$$

ונקבל כי

$$L = \frac{2}{\frac{1}{L} + \frac{1}{4}}$$

שימו לב, אין פחד שנחלק באפס, כיוון שהסדרה מתחילה מ1 ועולה, הגבול גדול או שווה 1.

$$L\left(\frac{1}{L} + \frac{1}{4}\right) = 2$$

$$1 + \frac{1}{4}L = 2$$

$$\frac{1}{4}L = 1$$

$$L = 4$$

כעת, הרבה יותר מידי תלמידים טועים ועוצרים, ואני נאלץ בשמחה להוריד להם לפחות חצי מניקוד השאלה אם לא יותר.

(הסיבה שכאן הייתי נותן יותר היא בגלל משפט הפתיחה שמסביר את האסטרטגיה והקשר למשפט על מונוטונית וחסומה).

כי כל מה שאמרנו עד כה, הוא שאם הסדרה מתכנסת, גבולה הוא 4.

צריך להוכיח שהסדרה באמת חסומה, ואז לפי מה שאמרנו נובע שהגבול הוא 4.

נוכיח באינדוקציה שהסדרה אכן חסומה מלעיל ע"י 4.

בדיקה: $a_1 < 4$, אכן.

יהי n עבורו $a_n < 4$ צ"ל כי $a_{n+1} < 4$

אכן

$$a_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{4}}$$

כיוון ש$a_n < 4$ נובע כי $\frac{1}{a_n} > \frac{1}{4}$ (כבר ראינו שהסדרה חיובית)

לכן נקטין את המכנה ונגדיל את הביטוי

$$\frac{2}{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{4}} < \frac{2}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

.6

א. חשבו את גבול הסדרה

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k^2+n^2}$$

נסדר את הביטוי

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{n^2}{k^2+n^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1}$$

כיוון שהפונקציה $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ רציפה בקטע $[0,1]$ לפי המשפט מהכיתה

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1}=a_n\to\int_0^1 f(x)$$

כעת

$$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=[\arctan(x)]_0^1=\arctan(1)-\arctan(0)=\frac{\pi}{4}$$

סה"כ

$$a_n\to\frac{\pi}{4}$$

ב. קרבו את $\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}\right)$ עד כדי שגיאה של $h=\frac{1}{100}$.

נקבל באמצעות טיילור את הפונקציה

$$f(x)=\frac{1}{2}\sin(x)$$

סביב הנקודה המצוייה $x_0=0$

בנקודה הרצוייה $x=\frac{1}{2}$

ננחש סדר 4

$$f=\frac{1}{2}sin$$

$$f'=\frac{1}{2}cos$$

$$f'' = -\frac{1}{2}sin$$

$$f''' = -\frac{1}{2}cos$$

$$f^{(4)} = \frac{1}{2}sin$$

$$f^{(5)} = \frac{1}{2}cos$$

ולכן קיימת $0 < c < \frac{1}{2}$ עבורה

$$R_4 = \frac{f^{(5)}(c)}{5!}\left(\frac{1}{2} - 0\right)^5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos(c)}{5!} \cdot \frac{1}{2^5}$$

$$|R_4| \le \frac{1}{2^6 \cdot 5!} < \frac{1}{100}$$

עוד לא סיימנו כי צריך לתת את הקירוב

$$P_4(x) = 0 + \frac{1}{2}x + 0 - \frac{\frac{1}{2}}{3!}x^3 + 0 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^3$$

$$\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}\right) \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{12}\left(\frac{1}{2}\right)^3$$