2 אופרטורים צמודים לעצמים, Hessian, חתכי חרוט

2.1 ליכסון אורתוגונלי

משפט

לכל מטריצה ממשית סימטרית $M \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ יש ערך עצמי ממשי[1].

הגדרה

נגיד שאופרטור $P : V \to V$ הוא צמוד לעצמו אם"ם $\langle Pv, w\rangle = \langle v, Pw\rangle$ לכל $v, w \in V$

משפט

לכל אופרטור ממשי צמוד לעצמו יש ערך עצמי ממשי.

משפט 1

כל מטריצה ממשית סימטרית ניתנת ללכסון אותרוגונלי.

הוכחה

$$S = P\Lambda P^t$$

Λ אלכסונית, P מטריצה אורתוגונלית.

הגדרה P נקראת אורתוגונלית[2] אם $P^t = P^{-1}$. במילים אחרות - $P^tP = PP^t = I$.

הערה מטריצה $M = P\Lambda P^t$ היא בהכרח סימטרית

הוכחה $M^t = (P\Lambda P^t)^t = (P^t)^t \Lambda^t P^t = P\Lambda^t P^t = P\Lambda P^t = M$ (כי $\Lambda^t = \Lambda$ כי Λ אלכסונית ולכן סימטרית)

---

[1] יש מטריצות בלי ערך עצמי ממשי - למשל $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

[2] יותר נכון היה לקרוא לזה מטריצה אורתונורמלית, כי היא מורכבת מווקטורים אורתונורמליים, אבל זה השם המקובל.

הוכחה של משפט 1

נתבונן באופרטור $P_S : \mathbb{R}^n \underset{v \mapsto Sv}{\rightarrow} \mathbb{R}^n$. אזי P_S הוא צמוד לעצמו. לכן קיים ערך עצמי $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ וגם וקטור עצמי המתאים $v_1 \neq 0$ המקיים $|v_1| = 1$.

נניח $V_1 = V = \mathbb{R}^n$ ונגדיר $V_2 \subset V_1$ שהוא משלים אורתוגונלי של הישר $\mathbb{R}_{V_1}$(הישר הנפרש ע"י V_1)

$$V_1 = \mathbb{R}_{V_1} \overset{\perp}{\oplus} V_2$$

קיבלנו שני אופרטורים:

$$P_S : V_1 \to V_1$$

$$P_S|_{V_2} : V_2 \to V_2$$

גם כן צמוד לעצמו, לכן אם $w \in V_2$ אזי $\langle w, v_1 \rangle = 0$, לכן

$$\langle P_S (w), v_1 \rangle = \langle w, P (v_1) \rangle = \langle w, \lambda_1 v_1 \rangle = \lambda_1 \langle w, v_1 \rangle = 0$$

לכן $P_S (w) \in V_2$.

נשארנו עם

$$P_S|_{V_2} : V_2 \to V_2$$

בוחרים שוב ערך עצמי של $P_S|_{V_2}$ וגם וקטור עצמי $v_2 \in V_2$, $|v_2| = 1$.

נגדיר

$$V_3 = \{w \in V_2 | \langle w, v_2 \rangle = 0\}$$

$$\dim (V_3) = n - 2$$

וכו'.

מוצאים $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$ וגם וקטורים $v_1, v_2, ...v_n$.

$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$, וגם $P = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$.[3] $P = P^t$, $P = P^{-1}$, לכן

$P^t S P = P^t P \Lambda P \Lambda P^t P$ ולכן $\boxed{S = P \Lambda P^t}$.

כדי להוכיח ש-$S = P \Lambda P^t$, מספיק להוכיח $i = 1, ...n$, $S_{V_i} = (P \Lambda P^t)_{V_i}$. נוכיח זאת לכל ה$i$ים ביחד:

$$S \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \overset{?}{=} P \Lambda P^t \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$$

---

[3] זוהי מטריצה ריבועית, שכן $v_1, ...v_n$ וקטורי עמודות - $P = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & \cdots & v_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$

$$SP \stackrel{?}{=} P\Lambda P^t P = P\Lambda I_n$$

$$SP \stackrel{?}{=} P\Lambda$$

$$S_{V_i} = \lambda_i v_i$$

$$\begin{bmatrix}\lambda_1 v_1 & \cdots & \lambda_n v_n\end{bmatrix} = P\Lambda$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

דוגמה

$$n = 2$$

$$\det S = \lambda_1 \lambda_2$$

$$\mathrm{tr} S = \lambda_1 + \lambda_2$$

2.2 חתכי חרוט

הסיבה שקוראים להם חתכי חרוט היא שבאופן גיאומטרי ניתן להגדיר אותם על ידי חרוט(כפול) ־ לוקחים חרוט וחותכים אותו למשל על ידי מישור הנמצא בזווית קטנה לבסיסים ־ ומקבלים אליפסה. אם חותכים אותו ע"י ישר הניצב לבסיסים ־ מקבלים היפרבולה. אם חותכים אותו במקביל לקו המגדיר את החרוט ־ מקבלים פרבולה.

הגדרה

תחך חרוט הוא עקומה במישור מוגדרת ע"י משוואה ריבועית:

$$(*) \qquad ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

כאשר $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.

נרצה לכתוב את זה בצורה יותר קומפקטית.

נניח $X=\begin{bmatrix}z\\y\end{bmatrix}$ וגם $S=\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}$, $T=\begin{bmatrix}d&e\end{bmatrix}$ אזי $(*)$ היא שקולה למשוואה $(**)$:

$$(**)\qquad X^tSX+TX+f=0$$

משפט

עד כדי טרנספורמציה אורתוגונלית, כל חתך חרוט ניתן לביטוי בצורה "אלכסונית"

$$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+d'x'+e'y'+f=0$$

משמעות נפתרנו מהמקדם המעורב $2bxy$. היינו צריכים מקדם מעורב בגלל שלא בטוח שהמישור שחותך את החרוט מקביל/מאונך לצירים. ניתן להיפטר מהחלק הזה ע"י בחירת מערכת צירים לפי החתך.

הוכחה

נחזור ל$(**)$:

$$X^tSX+TX+f=0$$

ניתן ללכסן את S, כי היא סימטרית לפי ההגדרה. לכן לפי משפט לכסון אורתוגונלי, $S=P\Lambda P^t$ כאשר $\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{bmatrix}$ ואילו $P=\begin{bmatrix}v_1&v_2\end{bmatrix}$ היא מטריצה אורתוגונלית.
לכן $(**)$ הופכת ל

$$X^tP\Lambda\underbrace{P^tX}_{=X'}+TX+f=0$$

אזי $X^tP=X^tP^{tt}=(X')^t$. לכן

$$(X')^t\Lambda X'+TX+f=0$$

$$X'=P^tX$$

$$PX'=\underbrace{PP^t}_{I}X=X$$

$$X=PX'$$

$$(X')^t\Lambda X'+\underbrace{TP}_{T'}X'+f=0$$

$$\left(X'\right)^t \Lambda X' + T'X' + f = 0$$

אם נסמן $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ אזי מקבלים

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + T'X' + f = 0$$

$$T' = \begin{bmatrix} d' & e' \end{bmatrix}$$

2.3 פירוט של חתכי חרוט

משפט

נניח $\det S \neq 0$. אזי עד כדי הזזה ניתן לכתוב את חתך חרוט ע"י

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + f' = 0$$

הוכחה

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d'x' + e'y' + f = 0$$

$$\lambda_1 \neq 0 \qquad \lambda_2 \neq 0$$

$$\lambda_1 x'^2 + d'x' = \lambda_1 \left(x'^2 + 2\frac{d'}{2\lambda_1}x' + \left(\frac{d'}{2\lambda_1}\right)^2 - \left(\frac{d'}{2\lambda_1}\right)^2 \right) = \lambda_1 \left(\left(x' + \frac{d'}{2\lambda_1} \right)^2 - \left(\frac{d'}{2\lambda_1}\right)^2 \right)$$

נסמן $x'' = x' + \frac{d'}{2\lambda_1}$. אז מקבלים

$$\lambda_1 x'^2 + d'x' = \lambda_1 x''^2 - \lambda_1 \left(\frac{d'}{2\lambda_1}\right)^2$$

באופן דומה ניתן להיפתר מ-$e'y'$.

הגדרה

חתך חרוט

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + f' = 0$$

- נקרא אליפסה אם $\lambda_1\lambda_2 > 0$
- נקרא היפרבולה אם $\lambda_1\lambda_2 < 0$

דוגמה של אליפסה

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1$$

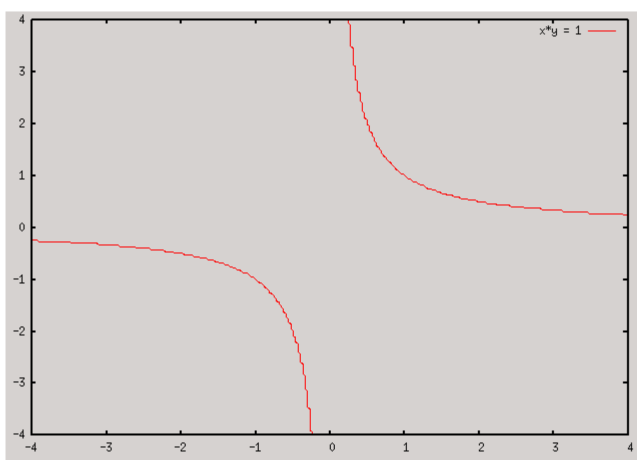
דוגמה של היפרבולה

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1$$

דוגמה

$$xy = 1$$

$$x^2 - y^2$$



זה יוצא פרבולה ־ אבל במערכת צירים אחרת(שלא מקבילה למערכת הצירים הרגילה):

$$x^2 - y^2 = 2$$

$$\left(\underbrace{\frac{x-y}{\sqrt{2}}}_{x''}\right)\left(\underbrace{\frac{x+y}{\sqrt{2}}}_{y''}\right) = 1$$

$$x''y'' = \frac{1}{2}$$

וכמובן, שינוי הקבוע פשוט משנה את הגודל.

הגדרה

חתח חרוט נקרא פרבולה אם מתקיימים שני תנאים:

1. $\mathrm{rank}S = 1$(מטריצה סינגולרית, $\det S = 0$) $\Leftrightarrow \lambda_1\lambda_2 = 0$ אבל $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$.
2. מחבר הלינארי $(d'x', e'y')$ המתאים לערך עצמי $\lambda_i = 0$ הוא שונה מאפס.

דוגמה

$y = x^2$, כלומר $1x^2 + 0y^2 + e'y = 0 \Leftarrow e' = -1$.

מסקנה

חתך חרוט

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + xy + f = 0$$

הוא אליפסה אם $ac - b^2 > 0$ והוא היפרבולה אם $ac - b^2 < 0$.

הוכחה

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\det S = ac - b^2$$

$$\det S = \lambda_1\lambda_2$$

2.4 משטחים ריבועיים

משטח M ב־$\mathbb{R}^3$ מוגדר ע"י

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dxz+fz^2+2gyz+hx+iy+jz+k=0$$

נרצה לכתוב את זה בצורה יותר קצרה, באמצעות וקטורים:

$$X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\qquad S=\begin{bmatrix}a&b&d\\b&c&g\\d&g&f\end{bmatrix}\qquad T=\begin{bmatrix}h&i&j\end{bmatrix}$$

$$X^tSX+TX+k=0$$

לפי משפט ליכסון אורתוגונלי:

$$S=P\Lambda P^t$$

$$X^tP\Lambda\underbrace{P^tX}_{X'}+TX+k=0$$

$$(X')^t\Lambda X'+T'X'+k=0$$

$$\begin{matrix}PX'=PP^tX\\X=PX'\end{matrix}\quad\Rightarrow T'=TP$$

נסמן $X'=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$, $\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1&&0\\&\lambda_2&\\0&&\lambda_3\end{bmatrix}$, ונקבל

$$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\lambda_3z'^2+T'X'+k=0$$

דוגמה

משוואת הכדור:

$$x^2+y^2+z^2=1$$