פתרון תרגיל בית 7 בתורת החבורות
88-218 סמסטר א׳ תשע״ח

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום שם מלא, מספר ת״ז ומספר קבוצת תרגול. הגישו את התרגיל בתרגול שלכם בשבוע המתחיל בתאריך 7.1.2018.

שאלות חימום

שאלות החימום הן שאלות שאינן להגשה, והן בדרך כלל קלות יותר. אבל כדאי מאוד לוודא שיודעים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

שאלה 1. תהי G חבורה ויהיו $A, B \subseteq G$ תת־קבוצות שלה. לכל סעיף כתבו פסוק לוגי שקול אך ורק עם כמתים (כמו $\forall$ ו-$\exists$) ושיוויונות מן הצורה $xy = zw$ עבור איברים של הקבוצות.

א. $ab = ba$ לכל איבר a של A ואיבר b של B.

ב. $aB = Ba$ לכל איבר a של A.

ג. $AB = BA$

נסו למצוא דוגמאות שמראות שיש הבדל בין הסעיפים השונים (מי גורר את מי?).

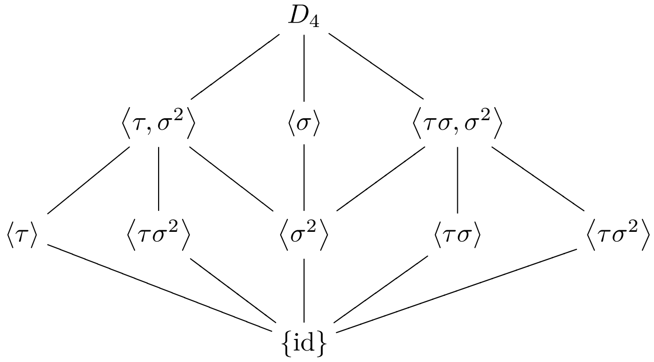
פתרון. כל סעיף גורר את אלו שתחתיו.

א. $\forall a \in A \ \ \forall b \in B : ab = ba$.

ב. $\forall a \in A \ \ \forall b \in B \ \ \exists b' \in B : ab = b'a$.

ג. $\forall a \in A \ \ \forall b \in B \ \ \exists b' \in B \ \ \exists a' \in A : ab = b'a'$.

שאלה 2. לפניכם סריג תת־החבורות של D_4:



מצאו את סריג תת־חבורות של $D_4 / \langle \sigma^2 \rangle$ ואת כל המנות שלה בעזרת משפטי האיזומורפיזמים.

פתרון. בעזרת משפט ההתאמה, נקבל את התרשים הבא

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & D_4/\left\langle\sigma^2\right\rangle \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\left\langle\tau,\sigma^2\right\rangle/\left\langle\sigma^2\right\rangle \arrow[dr, dash] & \left\langle\sigma\right\rangle/\left\langle\sigma^2\right\rangle \arrow[d, dash] & \left\langle\tau\sigma,\sigma^2\right\rangle/\left\langle\sigma^2\right\rangle \arrow[dl, dash] \\
 & \left\langle\sigma^2\right\rangle/\left\langle\sigma^2\right\rangle &
\end{tikzcd}$$

שאלות להגשה

פתרו לפחות **שלוש** שאלות מתוך השאלות הבאות. מומלץ לנסות ולהגיש תשובות נוספות, כי גם אם לא מקבלים עליהן ניקוד, עדין מקבלים עליהן משוב.

שאלה 3. תהינה $G_1,\ldots,G_n$ חבורות ותהינה $H_1,\ldots,H_n$ תת־חבורות נורמליות שלהן בהתאמה (כלומר $H_i \lhd G_i$ לכל i).

א. הוכיחו כי $H_1\times\cdots\times H_n \lhd G_1\times\cdots\times G_n$.

ב. הוכיחו כי $(G_1\times\cdots\times G_n)\,/\,(H_1\times\cdots\times H_n)\cong {}^{G_1}\!/\!_{H_1}\times\cdots\times {}^{G_n}\!/\!_{H_n}$.

פתרון.

א. קל לראות כי $H_1\times\cdots\times H_n$ היא תת־חבורה של $G_1\times\cdots\times G_n$. נבדוק שהיא סגורה להצמדה. יהיו

$$(g_1,\ldots,g_n)\in G_1\times\cdots\times G_n,\qquad (h_1,\ldots,h_n)\in H_1\times\cdots\times H_n$$

אז נחשב

$$\begin{aligned}(g_1,\ldots,g_n)\,(h_1,\ldots,h_n)\,(g_1,\ldots,g_n)^{-1}&=(g_1h_1,\ldots,g_nh_n)\left(g_1^{-1},\ldots,g_n^{-1}\right)\\&=\left(g_1h_1g_1^{-1},\ldots,g_nh_ng_n^{-1}\right)\end{aligned}$$

לכל $1\le i\le n$, תת־החבורה H_i נורמלית ולכן $g_ih_ig_i^{-1}\in H_i$. קיבלנו כי $\left(g_1h_1g_1^{-1},\ldots,g_nh_ng_n^{-1}\right)\in H_1\times\cdots\times H_n$.

ב. נעזר במשפט האיזומורפיזם הראשון (הבינו למה אפשר לפתור את שני הסעיפים כאן בבת אחת). מפני ש-$G_i \rhd H_i$, אזי ${}^{G_i}\!/\!_{H_i}$ חבורה לכל i, ולכן המכפלה הקרטזית ${}^{G_1}\!/\!_{H_1}\times\cdots\times {}^{G_n}\!/\!_{H_n}$ היא חבורה. נגדיר העתקה

$$\begin{aligned}\pi\colon G_1\times\cdots\times G_n&\to {}^{G_1}\!/\!_{H_1}\times\cdots\times {}^{G_n}\!/\!_{H_n}\\(g_1,\ldots,g_n)&\mapsto(g_1H_1,\ldots,g_nH_n)\end{aligned}$$

שקל לראות שהיא על, כי היא "מכפלה קרטזית" של הטלות. נבדוק שהיא הומומורפיזם:

$$\begin{aligned}\pi\,(g_1,\ldots,g_n)\,\pi\,(g_1',\ldots,g_n')&=(g_1H_1,\ldots,g_nH_n)\,(g_1'H_1,\ldots,g_n'H_n)\\&=(g_1g_1'H_1,\ldots,g_ng_n'H_n)=\pi\,(g_1g_1',\ldots,g_ng_n')\\&=\pi\,((g_1,\ldots,g_n)\,(g_1',\ldots,g_n'))\end{aligned}$$

וזה נכון לכל קבוצה של הומומורפיזמים $f_i\colon G_i\to K_i$ שגם $f\colon \prod_i G_i\to\prod_i K_i$ המוגדרת כך שברכיב ה-i נקבל $g_i\mapsto f_i(g_i)$ היא הומומורפיזם. נחשב את הגרעין של π:

$$\begin{aligned}\ker\pi &= \left\{(g_1,\dots,g_n)\in G_1\times\cdots\times G_n \,\middle|\, \pi(g_1,\dots,g_n)=e_{G_1/H_1\times\cdots\times G_n/H_n}\right\}\\ &=\{(g_1,\dots,g_n)\in G_1\times\cdots\times G_n \mid (g_1H_1,\dots,g_nH_n)=(H_1,\dots,H_n)\}\\ &=\{(g_1,\dots,g_n)\in G_1\times\cdots\times G_n \mid \forall i: g_i\in H_i\}=H_1\times\cdots\times H_n\end{aligned}$$

ולפי משפט האיזומורפיזם הראשון נקבל את הדרוש.

שאלה 4. תהי $N\lhd G$ תת־חבורה נורמלית סופית, $H\le G$ תת־חבורה מאינדקס סופי ונניח $([G:H],|N|)=1$. הוכיחו כי $N\le H$.

פתרון. קל לראות כי $|N\cap H|\le|N|<\infty$. לפי משפט האיזומורפיזם השני $NH/N\cong H/(N\cap H)$. מפני ש-N נורמלית, אז $NH\le G$ ובנוסף $NH=HN$. עם הוכחה דומה לזו שבמשפט האיזומורפיזם השני ניתן להראות (הראו!) שלכל זוג תת־חבורות מתחלפות, ואין אפילו צורך שאחת מהן תהיה נורמלית, מתקיים $[N:N\cap H]=[NH:H]$. ביחד עם הנתון $[G:H]<\infty$ ומכפליות האינדקס נקבל

$$[G:H]=[G:NH]\,[NH:H]=[G:NH]\,\frac{|N|}{|N\cap H|}$$

לכן $[G:H]\mid[G:NH]\cdot|N|$. אבל $([G:H],|N|)=1$, ולכן $[G:H]$ מחלק את $[G:NH]$. מפני ש-$H\le NH$ נסיק $[G:H]=[G:NH]$. מכאן נקבל

$$[N:N\cap H]=[NH:H]=1$$

ולכן $N\le H$.

שאלה 5. נסמן כמה מטריצות מרוכבות הפיכות

$$1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad i=\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix},\quad j=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\quad k=\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}$$

שימו לב לא להתבלבל בתפקיד של 1 ושל i בתוך המטריצות שם הם מספרים מרוכבים, וכסימון למטריצות. נגדיר את חבורת הקווטרניונים להיות $Q=\langle i,j,k\rangle\le GL_2(\mathbb{C})$.

א. בתאריך 16 באוקטובר 1843 חרט ויליאם רואן המילטון על גשר בְּרוּם

$$i^2=j^2=k^2=ijk=-1$$

חשבו את טבלת הכפל של Q (עם הסברים קצרים). רמז: המילטון לא טעה, והחבורה סופית אחרי שמבינים שהאיברים הם רק $\{\pm1,\pm i,\pm j,\pm k\}$.

ב. הוכיחו שכל תת־החבורות של Q הן נורמליות (ואבליות, פרט ל-Q עצמה). רמז: בדקו מה יכול להיות האינדקס, ולמקרה היחיד שהוא קצת קשה העזרו בסעיף הקודם.

ג. הפריכו את הטענה הבאה: לכל חבורה אבלית A לחבורה $Q\times A$ יש רק תת־חבורות נורמליות. רמז: בחרו למשל את $A=\mathbb{Z}_4$ ותת־חבורה ציקלית מסוימת.

פתרון.

א. בדיקה ישירה תראה שאכן המילטון לא טעה. ברור ש-1 הוא איבר היחידה, כי זהו איבר היחידה של $GL_2(\mathbb{C})$. נשים לב כי ± 1 הם מטריצות סקלריות ולכן מתחלפות עם כל מטריצה. נמצא טבלת הכפל על ידי שימוש בזהויות של המילטון. למשל נקבל שההופכיים של i,j,k הם $-i,-j,-k$ בהתאמה (בפירוט: $i^2=-1$ ולכן $i^4=1$ ונשים לב כי $i^3=-i$). כדי למצוא למה שווה ij נכפיל את $ijk=-1$ ב-k מימין ונקבל $-ij=-k$ ולכן $ij=k$. כך ממשיכים לכל זוג איברים ומגלים שאין יותר משמונת האיברים הרשומים. לפיכך נקבל

$\cdot$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

לוח הכפל של Q

ב. תהי $H\leq Q$. לפי משפט לגראנז' הסדר של תת־חבורה מחלק את סדר החבורה. לכן הסדרים האפשריים של H הם $1,2,4,8$. אם $|H|=1$ או $|H|=8$, אז H תת־חבורה טריוויאלית וראינו שהן נורמליות. אם $|H|=4$, אז $[Q:H]=2$, ולפי תרגיל שעשינו בכיתה ראינו כי זה מכריח ש-Hנורמלית.
אם $|H|=2$, אז H חייבת להיות ציקלית (ואיזומורפית ל-$\mathbb{Z}_2$) כי 2 ראשוני. בעזרת הסעיף הקודם נחפש איברים מסדר 2, שתת־החבורות שהם יוצרים הן כל תת־החבורות מסדר 2. מסתבר שרק -1 הוא מסדר 2. המטריצה שהוא מייצג היא סקלרית, ולכן מתחלפת עם כל מטריצה ב-$M_2(\mathbb{C})$ ובפרט עם איברי Q. לכן לכל $a\in Q$ נקבל

$$a\cdot\langle -1\rangle=\{a,-a\}=\langle -1\rangle\cdot a$$

ולכן $\langle 1\rangle$ נורמלית
דרכים אחרות: הראו כי $Z(Q)=\langle -1\rangle$, ואז ברור שהיא נורמלית. או ש-$\langle -1\rangle$ היא תת־החבורה היחידה מסדר 2, ולכן נורמלית, כי כל תת־חבורה שצמודה אליה היא גם מסדר 2.

ג. נעזר ברמז, נבחר את $A=\mathbb{Z}_4$ ואת תת־החבורה

$$H=\langle (i,1)\rangle=\{(1,0)\,,(i,1)\,,(-1,2)\,,(-i,3)\}\leq Q\times A$$

נשים לב כי

$$(j,0)\,(i,1)\,(j,0)^{-1}=(-jij,0+1-0)=(-jk,1)=(-i,1)\notin H$$

כלומר H אינה סגורה להצמדה, ולכן אינה נורמלית.
למעשה לחבורה $Q\times\mathbb{Z}_4$ יש בדיוק שש תת־חבורות לא נורמליות וכולן ציקליות מן הצורה $\langle (a,b)\rangle$ כאשר $a\in\{i,j,k\}$ ו-$b\in\{1,3\}$.

שאלה 6. לסעיף השני כדאי להעזר בשאלה 5.

א. תהי G חבורה שחיתוך כל תת־החבורות הלא טריוויאליות שלה אינו טריוויאלי. כלומר

$$\bigcap_{\substack{H\leq G\\ H\neq\{e\}}} H\neq\{e\}$$

נניח כי G פועלת על קבוצה X עבורה $|X| = k < |G|$. הוכיחו שלא קיים שיכון $\varphi\colon G \to S_k$.

ב. הסיקו כי אין שיכון $\varphi\colon Q \to S_k$ לכל $k < 8$, אבל הראו שיש שיכון $\varphi\colon Q \to S_8$.

פתרון.

א. יהי $g \neq e$ איבר בחיתוך כל תת־החבורות הלא טריוויאליות של G, וקיים כזה g לפי הנתון. לכל $x \in X$ אנחנו יודעים לפי משפט מסלול-מייצב כי

$$[G : \mathrm{stab}(x)] = |\mathrm{orb}(x)| \leq |X| < |G|$$

כלומר המייצב $\mathrm{stab}(x)$ אינו טריוויאלי, ולכן $g \in \mathrm{stab}(x)$ (כי g שייך לחיתוך כל תת־החבורות הלא טריוויאליות, ובפרט למייצבים!). הזכרו שכל פעולה של G על X היא למעשה הומומורפיזם $\varphi\colon G \to S_k$, וחיתוך כל המייצבים הוא הגרעין של φ. כלומר

$$e \neq g \in \bigcap_{x \in X} \mathrm{stab}(x) = \ker\varphi$$

לכן G אינה משוכנת ב-S_k, כי $\ker\varphi \neq \{e\}$.

ב. אפשר לוודא שכל תת־החבורות של Q (פרט ל-Q עצמה) הן ציקליות. מכאן קל לחשב שחיתוך כל תת־החבורות הלא טריוויאליות של Q הוא $\{1, -1\}$. נבחר $g = -1$ כמו בסעיף הקודם ונקבל כי אין שיכון $\varphi\colon Q \to S_k$ לכל $k < |Q| = 8$. משפט קיילי מספק שיכון $\varphi\colon Q \to S_8$.

שאלה 7 (קצת חזרה)**.** הפריכו או הביאו דוגמה לטענות הבאות:

א. קיים אפימורפיזם $f: \mathbb{Z}_{56} \to \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_8$.

ב. קיים מונומורפיזם $f: \mathbb{Z}_{40} \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{10}$.

ג. קיים איזומורפיזם $f: S_4 \to D_{12}$.

ד. קיים מונומורפיזם $f: A_5 \to \mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_5 \times U_{14}$.

ה. קיים מונומורפיזם $f: A_4 \to D_{12} \times S_5$.

ו. קיים אפימורפיזם $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$. רמז: הבינו למה מנה של חבורה ציקלית היא ציקלית.

פתרון.

א. קיים אפימורפיזם, והוא אפילו איזומורפיזם. נזכר בטענה ש-$\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{nm}$ אם ורק אם $(n, m) = 1$. אצלנו $(7, 8) = 1$ וגם $56 = 7 \cdot 8$.

ב. לא קיים מונומורפיזם. בחבורה $\mathbb{Z}_{40}$ יש איברים מסדר 40, ואילו בחבורה $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{10}$ האיברים הם מסדר 20 לכל היותר (כי $\mathrm{lcm}(2, 4, 10) = 20$). אילו היה מונומורפיזם, אז התמונה של איבר מסדר 40 הייתה גם איבר מסדר 40, והרי אין כזה.

ג. לא קיים איזומורפיזם. נכון ששתי החבורות הן לא אבליות מסדר 24, אבל הן עדין לא איזומורפיות. בחבורה D_{12} יש איבר מסדר 12, ואילו ב-S_4 הסדר של האיברים הוא לכל היותר 4.

ד. לא קיים מונומורפיזם. הוכחנו בתרגיל שאי אפשר לשכן חבורה לא אבלית בחבורה אבלית. בפירוט: אילו f היה מונומורפיזם כזה, אז $A_5 \cong \mathrm{im}\, f$. אבל $\mathrm{im}\, f \leq \mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_5 \times U_{14}$ היא תת־חבורה של חבורה אבלית, ולכן בעצמה אבלית. זו סתירה כי A_5 לא אבלית.

ה. קיים מונומורפיזם. אנו יכולים לראות את A_n כתת־חבורה של S_{n+1} לפי השיכון הסטנדרטי, השולח תמורה σ של n איברים לתמורה $\hat{\sigma}$ של $n+1$ איברים לפי $\hat{\sigma}(i) = \sigma(i)$ לכל $1 \leq i \leq n$ ומקבע את האיבר האחרון $\hat{\sigma}(n+1) = n+1$. כלומר יש מונומורפיזם $f_1 \colon A_4 \to S_5$. כמובן שיש מונומורפיזם $f_2 \colon S_5 \to D_{12} \times S_5$ המוגדר לפי $f_2(\sigma) = (\mathrm{id}, \sigma)$. ההרכבה $f_2 \circ f_1$ היא דוגמה למונומורפיזם המבוקש.

ו. לא קיים אפימורפיזם. אפשר להראות ש-$\mathbb{Q}$ אינה ציקלית למשל על ידי מציאת איבר שאינו שייך לתת־חבורה ציקלית נתונה של $\mathbb{Q}$: אם $\left\langle \frac{a}{b} \right\rangle \leq \mathbb{Q}$ עבור שבר מצומצם $\frac{a}{b}$, אז $\frac{1}{2b} \notin \left\langle \frac{a}{b} \right\rangle$. לפי משפט האיזומורפיזם הראשון, אילו f היה אפימורפיזם, אז $\mathbb{Z}/\ker f \cong \mathbb{Q}$. אבל מנה של חבורה ציקלית, כמו $\mathbb{Z}$, היא בהכרח ציקלית, ובפרט לא איזומורפית לחבורה שאינה ציקלית, כמו $\mathbb{Q}$.

שאלה 8. תהי G חבורה ותהי $H \leq G$. נגדיר את הליבה של H ב-G להיות

$$\mathrm{Core}(H) = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$$

א. הוכיחו כי $\mathrm{Core}(H) \leq G$. רמז: יותר קל להתחיל בהוכחת $gHg^{-1} \leq G$ לכל $g \in G$.

ב. הוכיחו ש-$\mathrm{Core}(H)$ היא תת־החבורה הנורמלית הגדולה ביותר של G שמוכלת ב-H.

ג. תנו דוגמה לחבורה G, ולשתי תת־חבורות לא טריוויאליות H, K (הן לא G ולא $\{e\}$) כך ש-$\mathrm{Core}(H) = \{e\}$ וגם $\mathrm{Core}(K) = K$.

פתרון.

א. נעזר ברמז ונוכיח $gHg^{-1} \leq G$ לכל $g \in G$. יהיו $h_1, h_2 \in H$. נבדוק סגירות לכפל:

$$\left(gh_1g^{-1}\right)\left(gh_2g^{-1}\right) = gh_1(gg^{-1})h_2g^{-1} = gh_1h_2g^{-1} \in gHg^{-1}$$

כי $h_1h_2 \in H$. נבדוק סגירות להופכי:

$$(gh_1g^{-1})^{-1} = (g^{-1})^{-1}h_1^{-1}g^{-1} = gh_1^{-1}g^{-1} \in gHg^{-1}$$

כי $h_1^{-1} \in G$. נותר להראות ש-gHg^{-1} לא ריקה: היא מכילה את איבר היחידה כי $e = geg^{-1} \in gHg^{-1}$. מפני ש-$gHg^{-1} \leq G$ לכל $g \in G$, אז גם החיתוך של כולן הוא גם תת־חבורה. כלומר $\mathrm{Core}(H) \leq G$.

ב. מכיוון ש-$H = eHe^{-1}$ מופיע בחיתוך בהגדרת הליבה, אז ברור ש-$\mathrm{Core}(H) \subseteq H$. יהי $x \in \mathrm{Core}(H)$ ו-$a \in G$ ונראה ש-$\mathrm{Core}(H)$ סגורה להצמדה. נראה כי $axa^{-1} \in gHg^{-1}$ לכל $g \in G$, ונסיק ש-axa^{-1} שייך לחיתוך של כל gHg^{-1}, כלומר לליבה של H. אכן, מפני ש-$a^{-1}g \in G$, אז

$$x \in \mathrm{Core}(H) \subseteq a^{-1}gH\left(a^{-1}g\right)^{-1} = a^{-1}gHg^{-1}a$$

ולכן $axa^{-1} \in aa^{-1}gHg^{-1}aa^{-1} = gHg^{-1}$. לכן $\mathrm{Core}(H) \lhd G$.
תהי $N \lhd G$ תת־חבורה נורמלית. אז לכל $g \in G$, $N = gNg^{-1}$. אם $N \subseteq H$ נקבל

$$N = gNg^{-1} \subseteq gHg^{-1}$$

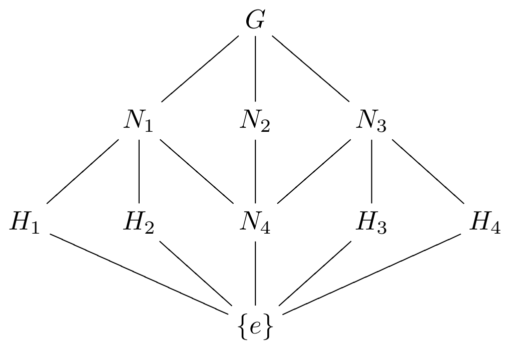
לכל $g \in G$. לכן $N \subseteq \bigcap_{g \in G} gHg^{-1} = \mathrm{Core}(H)$.
דרך אחרת: ראינו ש-G פועלת על הקבוצה G/H ולכן יש הומומורפיזם $\varphi \colon G \to S_{G/H}$. אפשר לראות ש-$\ker\varphi = \mathrm{Core}(H)$, ולכן היא בודאי תת־חבורה נורמלית, וזה מוכיח גם את הסעיף הקודם.

ג. הבינו מדוע חייבים לבחור חבורה לא אבלית. אנחנו נבחר לדוגמה את $G = S_3$, $H = \langle(12)\rangle$ ו-$K = A_3$. מפני ש-$K \lhd G$, אז לפי הסעיף הקודם $\mathrm{Core}(K) = K$ כי היא תת־החבורה הנורמלית הגדולה ביותר של S_3 שמוכלת ב-K. ראינו בכיתה כי H אינה תת־חבורה נורמלית של S_3. לכן $\mathrm{Core}(H) \subsetneq H$. אבל H מסדר 2, ולכן בהכרח $\mathrm{Core}(H) = \{e\}$, שהיא מסדר 1.

שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה צרפו את הפתרון שלהן.

שאלה 9. תהי חבורה G עם סריג תת־החבורות הבא:



כאשר $H_i \leq G$ ו-$N_i \lhd G$. הוכיחו כי $G \cong D_4$.

רמז: סמנו $k = [G : N_1]$ והשתמשו כמה פעמים במשפטי האיזומורפיזמים. כנראה בדרך תצטרכו להוכיח ש-k ראשוני, ואז מוכרח להיות $k = 2$.

בהצלחה!