פיתרון לינארית תרגיל 9

1. $b=(b_1,b_2)$, $a=(a_1,a_2)$

א) $\langle a,b\rangle = 2a_1b_1 + 7a_2b_2$

1. אי-שליליות:

$$\langle a,a\rangle = \langle (a_1,a_2),(a_1,a_2)\rangle$$

$$= 2a_1a_1 + 7a_2a_2 = 2a_1^2 + 7a_2^2 \geq 0$$

כל מס' ב-$\mathbb{R}$ בריבוע חיובי
וחיבור חיוביים = חיובי

(*) $\langle a,a\rangle = 0 \Rightarrow 2a_1^2 + 7a_2^2 = 0 \Rightarrow 2a_1^2 = -7a_2^2$
$\Rightarrow a_1 = a_2 = 0 \Rightarrow a = \vec{0}$

(*) $a = \vec{0} \Rightarrow \langle a,a\rangle = \langle 0,0\rangle = 2\cdot 0 + 7\cdot 0 = 0$

$$\langle a,a\rangle = 0 \iff a = \vec{0}$$

וזה נכון לכל $v\in\mathbb{R}^2$ ולכן מתקיים אי שליליות

2. סימטריות: נבדוק האם מתקיים

$\langle a,b\rangle \overset{?}{=} \overline{\langle b,a\rangle} \Rightarrow \langle a,b\rangle \overset{?}{=} \langle b,a\rangle$

כי אנחנו ב-$\mathbb{R}$

$$2a_1b_1 + 7a_2b_2 \qquad 2b_1a_1 + 7b_2a_2$$

אכן שווים בגלל חילופיות הכפל ב-$\mathbb{R}$

3. לינאריות במשתנה הראשון: עבור $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$; $a,b,v\in\mathbb{R}^2$

$$\langle \alpha a+\beta b, v\rangle = \langle \alpha(a_1,a_2)+\beta(b_1,b_2),(v_1,v_2)\rangle$$

$$= \langle (\alpha a_1+\beta b_1, \alpha a_2+\beta b_2),(v_1,v_2)\rangle = 2(\alpha a_1+\beta b_1)v_1 + 7(\alpha a_2+\beta b_2)v_2$$

$$= 2\alpha a_1v_1 + 2\beta b_1v_1 + 7\alpha a_2v_2 + 7\beta b_2v_2 =$$

$$= \alpha(2a_1v_1 + 7a_2v_2) + \beta(2b_1v_2 + 7b_2v_2) = \alpha\langle a,v\rangle + \beta\langle b,v\rangle$$

מתקיים אי שליליות, סימטריות ולינאריות במשתנה הראשון
ולכן אכן מכפלה פנימית.

ב) $\langle a,b\rangle = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1$

1. אי-שליליות: נפריך ע"י דוג' נגדית: עבור $a=(-2,2)$

$$\langle a,a\rangle = \langle(-2,2),(-2,2)\rangle = -2\cdot(-2) + (-2)\cdot 2 + 2\cdot(-2) = 4-4-4 = -4 < 0$$

ולכן לא מתקיים אי-שליליות
$\Downarrow$
לא מ"פ.

בס"ד

2. תהא $T:V\to V$ הע"ל

(א) צ"ל: אם לכל $u,v\in V$ מתקיים $\langle T(u),v\rangle=0$ אז $T=0$.

<u>הוכחה:</u> לכל $u\in V$ מתקיים $T(u)\in V$ (שהרי $T:V\to V$).

נתון שמתקיים שלכל $u,v\in V$ $\langle T(u),v\rangle=0$ ולכן

בפרט: לכל $u\in V$ $u,T(u)\in V$

$$\langle T(u),T(u)\rangle=0 \underset{\text{אי שליליות - תכונה של מ"פ}}{\Longrightarrow} T(u)=0$$

כלומר, קיבלנו שלכל $u\in V$ $T(u)=0$

ולכן $T=0$ ∎ מש"ל.

(ב) צ"ל: אם S קבוצה פורשת של V, ו-D קבוצה פורשת של $\operatorname{Im}T$, (נסמן $S=\{s_1,\dots,s_n\}$, נסמן $D=\{D_1,\dots,D_k\}$)

ולכל $u\in S$ ו-$v\in D$ מתקיים $\langle T(u),v\rangle=0$ אזי $T=0$.

<u>הוכחה:</u> לכל $w\in V$ מתקיים $w\in\operatorname{sp}S \Leftarrow w=\alpha_1s_1+\dots+\alpha_ns_n$ $\boxed{\alpha_i\in\mathbb{F}}$, $1\le i\le n$

כי D פורשת את $\operatorname{Im}T$ מתקיים $Tw\in\operatorname{sp}D \Leftarrow Tw=\beta_1D_1+\dots+\beta_kD_k$, $\beta_i\in\mathbb{F}$, $1\le i\le k$

$$\langle Tw,Tw\rangle \overset{*}{\underset{\text{נתון}}{=}} \langle T(\alpha_1s_1+\dots+\alpha_ns_n),\ \beta_1D_1+\dots+\beta_kD_k\rangle$$

$$=\langle \alpha_1Ts_1+\dots+\alpha_nTs_n,\ \beta_1D_1+\dots+\beta_kD_k\rangle \overset{*}{=} \alpha_1\bar\beta_1\underbrace{\langle Ts_1,D_1\rangle}_{0}+\alpha_1\bar\beta_2\underbrace{\langle Ts_1,D_2\rangle}_{0}+\dots+\alpha_1\bar\beta_k\underbrace{\langle Ts_1,D_k\rangle}_{0}$$
$$+\ \alpha_2\bar\beta_1\underbrace{\langle Ts_2,D_1\rangle}_{0}+\dots+\alpha_2\bar\beta_k\underbrace{\langle Ts_2,D_k\rangle}_{0}$$
$$+\ \dots$$
$$+\ \alpha_n\bar\beta_1\underbrace{\langle Ts_n,D_1\rangle}_{0}+\dots+\alpha_n\bar\beta_k\underbrace{\langle Ts_n,D_k\rangle}_{0}$$

*לינאריות במשתנה I ולינאריות בשני (המקדמים במשתנים של המשתנה השני הופכים לצמוד שלהם)

הם כולם 0 כי נתון שלכל $u\in S$ (והרי $s_1\dots s_n\in S$) ולכן $v\in D$ (והרי $D_1\dots D_k\in D$) מתקיים $\langle Tu,v\rangle=0$

$$=\alpha_1\bar\beta_1\cdot0+\dots+\alpha_1\bar\beta_k\cdot0+\dots+\alpha_n\bar\beta_1\cdot0+\dots+\alpha_n\bar\beta_k\cdot0=0$$

ולכן בסה"כ נקבל שלכל $u\in V$ $\langle Tu,Tu\rangle=0$

$\Leftarrow$ לכל $u\in V$ $Tu=0$ $\Leftarrow$ $T=0$ ∎ מש"ל.

3 יהא V מ"ו מעל $\mathbb{C}$ עם מ"פ, ותהא $T:V\to V$ העת"ל, כך שמתקיים שלכל $v\in V$ $\langle T(v),v\rangle=0$. הוכח $T=0$.

<u>הוכחה:</u> נתון שלכל $v\in V$ $\langle T(v),v\rangle=0$

בפרט עבור $u+v\in V$ (לחיבור במ"ו $u,v\in V$ ויש סגירות)

$$\langle T(u+v),u+v\rangle=0 \Rightarrow \langle T(u)+T(v),u+v\rangle=0$$

לינאריות במשתנה I

$$\Rightarrow \langle T(u),u+v\rangle+\langle T(v),u+v\rangle=0 \Rightarrow$$

יש כמעט לינאריות במשתנה השני, כלומר יש 'לינאריות' עם כאשר השוני היחיד הוא שהמקדמים במשתנה השני יהפכו, כאשר נוציא אותם, לצמודים של עצמם:

$$\langle u,\alpha v+\beta w\rangle=\bar{\alpha}\langle u,v\rangle+\bar{\beta}\langle u,w\rangle$$

כיוון שאצלנו המקדמים של u,v הם 1 אז הצמוד אותו דבר

$$\Rightarrow \circledast\ \underbrace{\langle Tu,u\rangle}_{0\text{ עפ"י נתון}}+\langle Tu,v\rangle+\langle Tv,u\rangle+\underbrace{\langle Tv,v\rangle}_{0\text{ עפ"י נתון}}=0$$

<u>מצב שני:</u>

$$\langle T(iu+v),iu+v\rangle=0$$

לינאריות במשתנה I

$$\Rightarrow \langle iT(u)+T(v),iu+v\rangle=0 \Rightarrow i\langle Tu,iu+v\rangle+\langle Tv,iu+v\rangle=0$$

כמעט לינאריות במשתנה II

$$\Rightarrow \underbrace{i\cdot\bar{i}}_{+1}\underbrace{\langle Tu,u\rangle}_{0\text{ עפ"י נתון}}+i\langle Tu,v\rangle+\underbrace{\bar{i}}_{-i}\langle Tv,u\rangle+\underbrace{\langle Tv,v\rangle}_{0\text{ עפ"י נתון}}=0\ \ /:i$$

$$\Rightarrow \circledast\circledast\ \langle Tu,v\rangle-\langle Tv,u\rangle=0$$

נחבר את $\circledast$ ו-$\circledast\circledast$ ונקבל

$$2\langle Tu,v\rangle=0\ \ /:2$$

לכל $u,v\in V$ מתקיים

$$\Downarrow$$

$$\langle Tu,v\rangle=0$$

ולכן עפ"י שאלה 2 סעיף א'

$$T=0$$

<u>מש"ל</u>

בס״ד

4. יהי $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס עבור V

א) יהי $v\in V$ כך שלכל i מתקיים $\langle v_i,v\rangle=0$ צ"ל $v=0$.

הוכחה: B בסיס ולכן

$$v=\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n \qquad \exists\,\alpha_i,\ 1\le i\le n$$

$$\langle v,v\rangle=\langle\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n,v\rangle \overset{\text{לינאריות במשתנה ראשון}}{=}$$

$$=\alpha_1\underbrace{\langle v_1,v\rangle}_{\text{נתון }=0}+\dots+\alpha_n\underbrace{\langle v_n,v\rangle}_{\text{נתון }=0}=0$$

סה"כ קיבלנו $0=\langle v,v\rangle$ ולכן $v=0$

מש"ל

ב) יהיו $u,w\in V$ כך שלכל i מתקיים $\langle v_i,u\rangle=\langle v_i,w\rangle$ צ"ל $u=w$

הוכחה: עפ"י הנתון מתקיים $0=\langle v_i,u\rangle-\langle v_i,w\rangle$

$$\overline{\langle u,v_i\rangle}-\overline{\langle w,v_i\rangle}=0$$

לינאריות במשתנה ראשון

$$\overline{\langle u-w,v_i\rangle}=0 \Rightarrow \boxed{\langle v_i,u-w\rangle=0}\ (*)$$

כעת,

$u-w\in V$, B בסיס $\Rightarrow u-w=\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n \qquad \exists\,\alpha_i,\ 1\le i\le n$

$$\langle u-w,u-w\rangle=\langle\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n,u-w\rangle \overset{\text{לינאריות במשתנה ראשון}}{=}$$

$$=\alpha_1\underbrace{\langle v_1,u-w\rangle}_{\text{עפ"י }(*)\ =0}+\dots+\alpha_n\underbrace{\langle v_n,u-w\rangle}_{\text{עפ"י }(*)\ =0}$$

$$=0$$

$\Leftarrow$ סה"כ קיבלנו $0=\langle u-w,u-w\rangle$

$$\Downarrow$$

$$u-w=0$$

$$\Downarrow$$

$$u=w$$

מש"ל

בס"ד

5. תהא ‖ ‖ הנורמה המושרית ממכפלה פנימית $\langle\,,\rangle$ של V.
הוכח את הזהויות הקוטביות של המ"פ:

1. כאשר $\mathbb{F}=\mathbb{R}$: $\langle u,v\rangle=\frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2\right)$

2. כאשר $\mathbb{F}=\mathbb{C}$:
$$\langle u,v\rangle=\frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2+i\|u+iv\|^2-i\|u-iv\|^2\right)$$

הוכחה: 1.
$$\frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2\right)=\frac{1}{4}\left(\left(\sqrt{\langle u+v,u+v\rangle}\right)^2-\left(\sqrt{\langle u-v,u-v\rangle}\right)^2\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left(\langle u+v,u+v\rangle-\langle u-v,u-v\rangle\right)\underset{\text{לינאריות במשתנה ראשון}}{=}\frac{1}{4}\left(\langle u,u+v\rangle+\langle v,u+v\rangle-\langle u,u-v\rangle+\langle v,u-v\rangle\right)$$

מעל $\mathbb{R}$ יש גם לינאריות במשתנה שני
$$=\frac{1}{4}\left(\cancel{\langle u,u\rangle}+\langle u,v\rangle+\underbrace{\langle v,u\rangle}_{\langle u,v\rangle}+\cancel{\langle v,v\rangle}-\cancel{\langle u,u\rangle}+\langle u,v\rangle+\underbrace{\langle v,u\rangle}_{\langle u,v\rangle}-\cancel{\langle v,v\rangle}\right)$$

כי לפי סימטריות $\left(\langle v,u\rangle=\overline{\langle u,v\rangle}\underset{\text{מעל }\mathbb{R}}{=}\langle u,v\rangle\right)$

$$=\frac{1}{4}\left(4\cdot\langle u,v\rangle\right)=\langle u,v\rangle$$

2.
$$\frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2+i\|u+iv\|^2-i\|u-iv\|^2\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left(\langle u+v,u+v\rangle-\langle u-v,u-v\rangle+i\langle u+iv,u+iv\rangle-i\langle u-iv,u-iv\rangle\right)$$

כי $\|x\|^2=\left(\sqrt{\langle x,x\rangle}\right)^2=\langle x,x\rangle$

$$\underset{\text{לינאריות במשתנה ראשון}}{=}\frac{1}{4}\left(\langle u,u+v\rangle+\langle v,u+v\rangle-\langle u,u-v\rangle+\langle v,u-v\rangle+i\langle u,u+iv\rangle+\underbrace{i\cdot i}_{-1}\langle v,u+iv\rangle-i\langle u,u-iv\rangle-\underbrace{i(-i)}_{-1}\langle v,u-iv\rangle\right)$$

שהרי כל המקדמים הם רק גם חלק ממשי ולכן יש גם לינאריות במשתנה שני (המקדמים הם 1 או -1)
$$=\cancel{\langle u,u\rangle}+\langle u,v\rangle+\langle v,u\rangle+\cancel{\langle v,v\rangle}-\left(\cancel{\langle u,u\rangle}-\langle u,v\rangle-\langle v,u\rangle\right)-\cancel{\langle v,v\rangle}$$
$$=2\langle u,v\rangle+2\langle v,u\rangle$$

כמעט לינאריות במשתנה שני (צה תופך לצמוד של המקדם):
$$\langle u,\alpha v+\beta w\rangle=\bar{\alpha}\langle u,v\rangle+\bar{\beta}\langle u,w\rangle$$

$$=\cancel{i\langle u,u\rangle}+\underbrace{i\cdot\bar{i}}_{+1}\langle u,v\rangle-\langle v,u\rangle\cancel{-i\cdot\bar{i}\langle v,v\rangle}-\cancel{i\langle u,u\rangle}-\underbrace{i\cdot\overline{(-i)}}_{+1}\langle u,v\rangle-\langle v,u\rangle\cancel{-\overline{(-i)}\langle v,v\rangle}$$
$$=2\langle u,v\rangle-2\langle v,u\rangle$$

ולכן בסה"כ נקבל
$$=\frac{1}{4}\left(2\langle u,v\rangle+\cancel{2\langle v,u\rangle}+2\langle u,v\rangle-\cancel{2\langle v,u\rangle}\right)=\frac{1}{4}\left(4\langle u,v\rangle\right)$$
$$=\langle u,v\rangle$$

[redacted] סוף.