תרגיל בית 5 במבנים אלגבריים
89-214 סמסטר א' תשע"ז

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום בכל דף שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. תאריך הגשת התרגיל הוא בתרגול בשבוע המתחיל בתאריך כ"ה בכסלו ה'תשע"ז, 25.12.2016.

שאלות חימום

שאלות החימום הן שאלות שאינן להגשה, והן בדרך כלל קלות יותר. אבל כדאי מאוד לוודא שיודעים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

שאלה 1. הוכיחו שמתקיים:

א. $S_n = \langle (ij) : i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} \rangle$ (כלומר, S_n נוצרת על ידי קבוצת כל החילופים).

ב. $A_n = \langle (ijk) : i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\} \rangle$.

שאלה 2. תהי A_n חבורות החילופין (חבורת התמורות הזוגיות ב S_n). מה הם סדרי האיברים ב A_4?

שאלות להגשה

שאלה 3. הוכיחו שמתקיים: $S_n = \langle (1j) : j \in \{2, \ldots, n\} \rangle$ (רמז: אפשר באינדוקציה).

שאלה 4. תהי S_n חבורת התמורות.

א. מצא את תת החבורה ב S_7 הנוצרת ע"י התמורה: $(4537)(126)$. שימו לב שזוהי חבורה ציקלית.

ב. מצאו <u>יוצר</u> לחיתוך של תת החבורה שמצאתם בסעיף א' עם חבורת החילופין A_7.

שאלה 5. נגדיר את המֶרְכָּז של חבורה G להיות

$$Z(G) = \{g \in G : \forall h \in G, gh = hg\}$$

דהיינו זהו האוסף של כל האיברים ב-G שמתחלפים עם כל איברי G.

א. הוכיחו כי לכל חבורה G מתקיים $Z(G) \leq G$ (כלומר שהמרכז של חבורה הינו תת חבורה).

ב. מצאו את $Z(S_3)$ ואת $Z(GL_2(\mathbb{R}))$, ואת האינדקסים שלהם בתוך S_3 ובתוך $GL_2(\mathbb{R})$ בהתאמה.

שאלה 6. תהי $Q_8 = \{1, -1, i, j, k, -i, -j, -k\}$ חבורה עם פעולת כפל המוגדרת ע"י: $-1 = i^2 = j^2 = k^2 = ijk$. חבורה זו נקראת חבורת הקווטרניונים. נא לשים לב שבמרומז משמות האיברים מתקיים ש- $-i = (-1) \cdot i$, $(-i) \cdot (-j) = i \cdot j$ וכדומה.

א. השלימו את לוח הכפל של Q_8.

ב. מצאו את $Z(Q_8)$.

ג. מה האינדקס של $Z(Q_8)$ בתוך Q_8?

שאלה 7. מצאו תת חבורה ציקלית מסדר 4 ותת חבורה לא ציקלית מסדר 4 של U_{35}.

שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה צרפו את הפתרון שלהן.

שאלה 8. הראו שמתקיים: $S_3 = \langle (12), (123) \rangle = \langle (12), (23) \rangle$.

שאלה 9. הוכיחו: $A_n = \langle (12j) : j \in \{3, 4, \ldots, n\} \rangle$ (רמז: אינדוקציה).

שאלה 10. יהיו $n, m \in \mathbb{Z}$.נגדיר:

$$L = \{an + bm : a, b \in \mathbb{Z}\}$$

$$L_+ = \{t \in L : t > 0\}$$

משפט האפיון של הממ"מ אומר: $\gcd(n, m) = \min L_+$.
נוכיח אותו באמצעות כלים שלמדנו:

א. ראשית, הוכיחו שלכל $t \in L_+$: $\gcd(n, m) \leq t$.

ב. הוכיחו ש- $(L, +) \leq (\mathbb{Z}, +)$ (L תת-חבורה של $\mathbb{Z}$ עם פעולת החיבור).

ג. הסיקו את המשפט מסעיף א, מהעובדה שכל תת-חבורה של $(\mathbb{Z}, +)$ היא מהצורה $d\mathbb{Z}$ עבור $d \in \mathbb{Z}$ כלשהו, ומהעבודה ש- $n, m \in L$.

שאלה 11. צפו בפרק 10 בעונה 6 של הסדרה פיוצ'רמה.

א. רשמו את עשרים החילופים המתבצעים בפרק, ובדקו שמכפלתם היא אכן מכפלת הזהות. הדרכה: היו עקביים, ורשמו בכל מקרה את הגופים המחליפים זהויות או את הזהויות המחליפות גופים.

ב. נאמר שסדרת חילופים היא נאותה אם אף חילוף אינו מופיע בה יותר מפעם אחת. בפרק, פרופסור פארנסוורת' מצהיר שכל סדרה נאותה של חילופים על n עצמים אפשר להמשיך לסדרה נאותה על n העצמים ועוד שניים, כך שמכפלת כל החילופים היא הזהות. תן דוגמה נגדית למשפט זה, אם מסתפקים ב-n העצמים ועוד אחד.

ג. נסו להוכיח את המשפט.
רמזים וספוילרים בסרטון הזה מאת Mathologer וברשומה הזאת בבלוג המומלץ "לא מדויק" של גדי אלכסנדרוביץ'.