פתרון שיעורי בית 4

.

1. הגדרה: יהיו $(G_1,\star),(G_2,*)$ חבורות אזי גם $G_1\times G_2=\{(g_1,g_2)\,|\,g_1\in G_1,\,g_2\in G_2\}$ חבורה ביחס לפעולה $\bullet$ המוגדרת ע"י:

$$(g_1,g_2)\bullet(\tilde{g}_1,\tilde{g}_2)=(g_1\star\tilde{g}_1,g_2*\tilde{g}_2)$$

היחידה היא (e_{G_1},e_{G_2}) וההופכי של כל איבר $(g_1,g_2)\in G_1\times G_2$ הוא: $(g_1,g_2)^{-1}=\left(g_1^{-1},g_2^{-1}\right)$. לחבורה זו קוראים המכפלה (הקרטיזית) של G_1 ו G_2. למשל, $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3$ שראינו בתירגול. הוכיחו או הפריכו:

(א) אם $G_1\times G_2$ ציקלית אז גם G_1,G_2 ציקליות.

פתרון: נכון. נניח (g_1,g_2)יוצר. אזי - טענה: g_i יוצר של G_i לכל $1\leq i\leq 2$. נוכיח עבור g_1: יהא $a\in G_1$ אזי קיים n כך ש $(a,e)=(g_1,g_2)^n=(g_1^n,g_2^n)$ אזי $g_1^n=a$. ולכן $G_1\subseteq\langle g_1\rangle$. ההכלה השניה תמיד נכונה ולכן קיים שיוויון. באופן דומה $G_2=\langle g_2\rangle$.

(ב) אם G_1 וגם G_2 ציקליות אז $G_1\times G_2$ ציקלית.

פתרון: לא נכון. $\mathbb{Z}_n$ ציקלית (1 יוצר) אבל ראינו בתרגול שהחבורה $\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n$ אינה ציקלית.

2. הוכיחו כי החבורות הבאות אינן ציקליות:

(א) S_n עבור $n>2$.

פתרון: היא לא אבלית ולכן לא ציקלית.

(ב) $\mathbb{Q}$.

פתרון: נניח שציקלית. אזי $\mathbb{Q}=\left\langle\frac{a}{b}\right\rangle$ עבור a,b שלמים. יהא p ראשוני שאינו מחלק את b אזי $\frac{1}{p}\notin\left\langle\frac{a}{b}\right\rangle$. הוכחה: אחרת קיים n כך ש $\frac{1}{p}=n\frac{a}{b}=\frac{na}{b}$ ולכן $b=nap$ ומכאן ש p מחלק את b. סתירה.

(ג) $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_6$.

פתרון: נשים לב שזו חבורה עם 24 איברים. לכן מספיק להראות שאין איבר מסדר 24:

יהי $(a,b)\in\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_6$ מתקיים: $12(a,b)=(12a,12b)=(0,0)$, ולכן $o((a,b))\leq 12<24$.

3. מצאו את הסדרים של האיברים הבאים:

(א) $\sigma=(1,2)(3,4,2)\in S_5$.

פתרון: מתקיים $\sigma=(1,2)(3,4,2)=(1,2,3,4)$

ולכן הסדר הוא 4 (כאורך המחזור).

(ב) באופן כללי: תהא $\sigma \in S_n$ ויהא $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_m$ הפירוק למחזורים זרים. אזי $o(\sigma) = lcm\{o(\tau_i)\}_{i=1}^m$ (כאשר lcm הוא הכפולה המשותפת המינמאלית. למשל $lcm\{2,8,20,10\} = 40$).

פתרון: נסמן $d = lcm\{o(\tau_i)\}$ אזי $\sigma^d = \tau_1^d \cdots \tau_m^d = id$ (כי d מחלק את $o(\tau_i)$ לפי הגדרתו).

בנוסף, אם $\sigma^k = \tau_1^k \cdots \tau_m^k = id$ אזי לכל i מתקיים $\tau_i^k = id$(כי המחזורים זרים) ולכן $o(\tau_i)|k$ ולכן $lcm\{o(\tau_i\}|k$ ובפרט קטן שווה לו.

(ג) $\tau\sigma \in D_4$.

פתרון: נחשב: $(\tau\sigma)^2 = \tau(\sigma\tau)\sigma = \tau(\tau\sigma^{-1})\sigma = id$. לכן $o(\tau\sigma) = 2$ (בחזקת 1 זה עצמו, והוא לא הזהות).

(ד) $\tau\sigma \in D_5$.

פתרון: בדיוק כמו הסעיף הקודם.

(ה) $k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ בחבורת הקווטרניונים.

פתרון: נחשב: $k^2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$. כיון ש- $(-1)^2 = 1$ נקבל $o(k) = 4$.

4. תהא G חבורה סופית, ויהיו $a, b \in G$. הוכיחו/הפריכו:

(א) אם $o(ab) = o(a) \cdot o(b)$ אז a, b מתחלפים.

פתרון: לא נכון. ניקח $a = (1,2)(3,4), b = (2,3) \in S_4$ אזי $o(ab) = o((1,2,4,3)) = 4 = 2 \cdot 2 = o(a) \cdot o(b)$ אבל הם לא מתחלפים: $ab = (1,2,4,3) \neq (1,3,4,2) = ba$.

(ב) $\langle a \rangle = \langle a^3 \rangle$.

פתרון: לא נכון. ניקח $a = 1 \in \mathbb{Z}_3$ אזי $o(3a) = o(0) = 1$ אבל $o(1) = 3$

(ג) אם $b = a^4$ אז $\langle b \rangle \subseteq \langle a \rangle$.

פתרון: נכון. יהא $x \in \langle b \rangle = \langle a^4 \rangle$ אזי $x = \left(a^4\right)^n = a^{4n}$ עבור n שלם כלשהו. אזי בפרט x הוא חזקה של a ולכן שייך ל $\langle a \rangle$.

(ד) $\langle a \rangle = \langle a^{-1} \rangle$.

פתרון: נכון. נראה הכלה בכיוון אחד (הכיוון השני דומה). יהא $x \in \langle a \rangle$ אזי $x = a^n$ עבור n שלם כלשהוא. אזי $x = \left(a^{-1}\right)^{-n}$ ולכן הוא חזקה שלמה של a^{-1}, ובפרט שייך לחבורה הנוצרת על ידו.

5. תהא G חבורה. $g \in G$. נניח כי $g^k = e$. הוכיחו כי

$$o(g)|k$$

כלומר הסדר של g מחלק את k.

הדרכה: בצעו חילוק עם שארית של k ב $o(g)$.

פתרון: נסמן $o(g) = a$ אזי לפי חילוק עם שארית קיימים q, r כך ש $k = qa + r$ ו $0 \leq r < a$ אזי

$$e = g^k = g^{qa+r} = (a^a)^q \cdot g^r = e^q \cdot g^r = g^r$$

כיון ש a הוא הסדר של g ו $r < a$ נקבל כי $r = 0$. לכן $k = qa$

6. תהא G חבורה חילופית. יהיו $a,b\in G$ בעלי סדרים זרים. כלומר, נסמן $o(a)=n, o(b)=m$ אזי $\gcd(n,m)=1$ (ל n,m אין מחלק משותף פרט ל־1). הוכיחו כי

$$o(ab)=m\cdot n$$

היעזרו בתרגיל מספר 5.

פתרון: מצד אחד $(ab)^{mn}=a^{mn}b^{mn}=(a^n)^m(b^m)^n=e^me^n=e$. כעת, אם $(ab)^k=a^kb^k=e$. נעלה את שני האגפים בחזקת n ונקבל $\left(a^kb^k\right)^n=a^{kn}b^{kn}=b^{kn}=e$, ולכן לפי תרגיל 5 $m|kn$, וכיוון ש n,m זרים נקבל כי $m|k$. באופן דומה נקבל כי $n|k$. שוב, כיוון שאלו מספר זרים, נקבל כי $m\cdot n|k$, ובפרט $mn\leq k$.

7. כמה יוצרים יש ל $\mathbb{Z}_6=\{\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{5}\}$ (עם פעולת חיבור מדולו 6)?

פתרון: ברור כי $\mathbf{1}$ יוצר. לפי 4ד גם $\mathbf{5}=-\mathbf{1}$ יוצר. בנוסף כל השאר אינם יוצרים כי $\mathbf{0}=3\cdot\mathbf{4}=3\cdot\mathbf{2}=2\cdot\mathbf{3}=3\cdot\mathbf{2}=1\cdot\mathbf{0}$ ולכן הסדרים שלהם קטנים מ־6.

8. תהא G חבורה ויהא $g\in G$ מסדר n. הוכיחו כי $o(g^k)=\frac{n}{\gcd(k,n)}$.

פתרון: מצד אחד

$$\left(g^k\right)^{\frac{n}{\gcd(k,n)}}=\left(g^n\right)^{\frac{k}{\gcd(k,n)}}=e^{\frac{k}{\gcd(k,n)}}=e$$

ולכן $o(g^k)\leq\frac{n}{\gcd(k,n)}$.

מצד שני נניח

$$\left(g^k\right)^m=e$$

צריך להראות: $\frac{n}{\gcd(k,n)}\leq m$. מההנחה נובע ש־ $g^{km}=e$, ומכאן ש $\exists t: nt=km$ (כי $n|mk$). נחלק את שני האגפים ב $\gcd(k,n)$, ונקבל

$$\frac{n}{\gcd(k,n)}t=\frac{k}{\gcd(k,n)}m$$

מכיוון ש־ $\frac{k}{\gcd(k,n)},\frac{n}{\gcd(k,n)}$ זרים (אחרת זה סתירה להגדרת gcd) נקבל כי $\frac{n}{\gcd(k,n)}|m$ (כי $\frac{n}{\gcd(k,n)}$ מחלק את $\frac{k}{\gcd(k,n)}m$) בפרט נקבל כי

$$\frac{n}{\gcd(k,n)}\leq m$$

9. האם הקבוצות הבאות הן תת חבורות:

(א) $A_n\subseteq S_n$ (כלומר, האם תת קבוצת התמורות הזוגיות היא תת חבורה של חבורות התמורות?).

פתרון: נכון. ראשית, $id\in A_n$ כי היא זוגית, אין היפוכי סדר.

בנוסף, צריך להראות שלכל $\sigma_1,\sigma_2\in A_n$ מתקיים: $\sigma_1\sigma_2^{-1}\in A_n$ כלומר זוגית. לצורך זה נוכיח ש־ $sgn(\sigma^{-1})=sgn(\sigma)$: נרשום את σ כהרכבת מס' זוגי, m, של חילופים: $\sigma=\tau_1\dots\tau_m$, לכן $\sigma^{-1}=\tau_m^{-1}\dots\tau_1^{-2}=\tau_m\dots\tau_1$, שזה גם הרכבה של מספר זוגי, m, של חילופים. לכן סימנה $sgn(\sigma)=(-1)^m=1$. ומכאן, אם $\sigma_1,\sigma_2\in A_n$ אז $sgn(\sigma_1)=sgn(\sigma_2)=1$, ולכן $sgn(\sigma_1\sigma_2^{-1})=1\cdot1=1$.

(ב) $\{(i,j)|1\leq i<j\leq n\}\cup\{id\}\subseteq S_n$ (כלומר, היחידה ואוסף החילופים).

פתרון: לא נכון עבור $n>2$, כי אין סגירות: $(1,2)(2,3)=(1,2,3)$, שזה לא חילוף ולא הזהות.

(ג) $\{0,2,4\}\subseteq\mathbb{Z}_5$.

פתרון: לא נכון, ל־4 אין הופכי, כי 1 לא נמצא (טוב, זה גם חוסר סגירות, כי זה כמו $4\cdot 4$).

(ד) $\{0,3\}\subseteq\mathbb{Z}_6$.

פתרון: נכון. כי $3+3\equiv 0 \pmod 6$, ולכן הוא ההופכי של עצמו, וכל התנאים מתקיימים.

10. תהי G חבורת הקווטרניונים, ותהי $H\leq G$ תת חבורה. הוכיחו: אם $j,k\in H$ אז $H=G$.

פתרון: הוכחה:

נניח $j,k\in H$. נשים לב $j^{-1}=-j, k^{-1}=-k$, ולכן גם הם נמצאים ב־H.

בנוסף, $j^2=-1, j^4=1$, לכן גם $\pm 1\in H$.

לבסוף, $jk=i, kj=-i$, ולכן גם $\pm i\in H$. ובסה"כ $H=G$.