תרגיל מספר 11 מבנים אלגבריים

1. יהא $0 \neq f(x) \in \mathbb{F}[x]$ פולינום מדרגה n. ראינו בתירגול כי $\mathbb{F}[x]/_{I(f)} = \{[g] |\ \deg(g) < n\, g \in \mathbb{F}[x]/_{\langle f \rangle}\}$. הוכיחו כי בקבוצה זאת האיברים שונים. כלומר, יהיו g_1, g_2 שני פולינומים מדרגה קטנה מ n. הוכיחו כי
$$[g_1] = [g_2] \iff g_1 = g_2$$
(להזכירכם היחס השקילות הוא $g \sim_I g' \iff g - g' \in I$).

2. עבור הפולינומים $a(x) = 1 + 2x^2, b(x) = 2 + x \in \mathbb{R}[x]$ מתקיים כי $1 = \gcd(a, b)$ ומתקיים
$$1 = \frac{1}{9}a(x) - \frac{2x-4}{9}b(x)$$
מצאו פולינום $f(x)$ המקיים
$$f(x) \quad \sim_{a(x)} \quad x$$
$$f(x) \quad \sim_{b(x)} \quad 5$$
כאשר $g \sim_{a(x)} f$ פירושו $g \sim_{I(a(x))} f$ או יותר מפורש $f - g \in I(a(x))$. [השתמשו ברעיון דומה למשפט השאריות הסיני]

3. תזכורת: יהיו R_1, R_2 חוגים. פונקציה $\phi : R_1 \to R_2$ תקרא הומומורפיזם של חוגים אם
   1. לכל $x, y \in R_1$ מתקיים $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$
   2. לכל $x, y \in R_1$ מתקיים $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$

   הערה: נסמן $R_1 \cong R_2$ (R_1 איזומורפי ל R_2) אם קיים $\phi : R_1 \to R_2$ הומורפיזם חח"ע ועל.

   (א) הוכיחו כי הגרעין $\ker \phi = \{x \in R_1 |\ \phi(x) = 0\}$ הוא אידיאל של R_1.

   (ב) הוכיחו כי $Im(\phi) = \{\phi(x) |\ x \in R_1\}$ הוא תת חוג של R_2 (כלומר הוא חוג ביחס לפעולות של R_2).

4. משפט האיזומורפיזם הראשון לחוגים: יהיו R_1, R_2 חוגים ויהא $\phi : R_1 \to R_2$ הומומורפיזם של חוגים אזי $R_1/_{\ker \phi} \cong Im(R_2)$.

   (א) יהא $\mathbb{F}$ שדה, $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{F}$ תת שדה שלו ו $a \in \mathbb{F}$. נגדיר $\phi : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{F}$ ע"י $\phi(f) = f(a)$ (פונקציה זאת נקראת הומומורפיזם ההצבה). הוכיחו כי ϕ הומומורפיזם.

   (ב) נתסכל על הומומורפיזם ההצבה הבא: $\phi; \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{R}$ המוגדר ע"י $\phi(f) = f(\sqrt{2})$ (שימו לב שזה דוגמא לסעיף הקודם). הוכיחו כי $Im(\phi) = \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} |\ a, b \in \mathbb{Q}\}$ ומצאו $\hat{f}(x) \in \mathbb{Q}[x]$ כך ש $\mathbb{Q}[x]/_{I(\hat{f})} \cong \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$