תרגיל 6 באלגברה לינארית למורים

19 בינואר 2017

שאלה 1

יהיו $v_1=(1,2,0)$, $v_2=(3,1,1)$ ו־$w=(4,-7,3)$. האם $w\in span\left\{v_1,v_2\right\}$?

פתרון:
נבדוק האם w הוא צירוף לינארי של v_1,v_2, כלומר רוצים לבדוק האם קיימים a,b כך ש־
$w=av_1+bv_2$, כלומר האם $(4,-7,3)=a\left(3,1,1\right)+b\left(1,2,0\right)$או בכתיב מטריצי:
$\left(\begin{array}{c}4\\-7\\3\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}a\\b\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc}3&1\\1&2\\1&0\end{array}\right)$, נבדוק האם למערכת הזאת קיים פתרון, נתבונן במטריצה מורחבת:
$\left(\begin{array}{ccc}3&1&4\\1&2&-7\\1&0&3\end{array}\right)$ ונבדוק האם יש בה שורת סתירה. לאחר דירוג נקבל נקבל מטריצה
$\left(\begin{array}{ccc}3&1&4\\0&1&-5\\0&0&0\end{array}\right)$,
לכן יש למערכת הזאת פתרון, ולכן קיימים a,b (למשל $a=3$, $b=-5$) כך ש־ $w=av_1+bv_2$ ולכן הוא שייך למרחב הנפרש ע"י v_1,v_2.

שאלה 2

יהיו $v_1=(2,5)$, $v_2=(1,3)$. הראה ש־$\{v_1,v_2\}$ קבוצה פורשת את כל ה־$\mathbb{R}^2$

פתרון:
ברור ש־$span\left\{v_1,v_2\right\}\subseteq\mathbb{R}^2$, רוצים להוכיח ש־$\mathbb{R}^2\in span\left\{v_1,v_2\right\}$.
יהי $\left(\begin{array}{c}x\\y\end{array}\right)\in\mathbb{R}^2$ רוצים להוכיח ש־$\left(\begin{array}{c}x\\y\end{array}\right)\in span\left\{v_1,v_2\right\}$, כלומר רוצים להראות ש־$\left(\begin{array}{c}x\\y\end{array}\right)$הוא צירוף לינארי של v_1,v_2:

$$\left(\begin{array}{c}x\\y\end{array}\right)=a\left(\begin{array}{c}1\\3\end{array}\right)+b\left(\begin{array}{c}2\\5\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc}1&2\\3&5\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}a\\b\end{array}\right).$$

נתבונן במטריצה המורחבת:
$\left(\begin{array}{ccc}1&2&x\\3&5&y\end{array}\right)$ לאחר דירוג מקבלים מטריצה בצורה קנונית $\left(\begin{array}{ccc}1&0&7x-2y\\0&1&3x-y\end{array}\right)$,

ולכן קיים פתרון למערכת הזאת לכל $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, ולכן כל וקטור ב-$\mathbb{R}^2$ מהווה צירוף לינארי של v_1, v_2 ולכן שייך למרחב הנפרש על ידם ולכן $\mathbb{R}^2 \subseteq span\{v_1, v_2\}$, ולכן $\mathbb{R}^2 = span\{v_1, v_2\}$.

שאלה 3

הוכח או הפרך: $A, B \subset V$ קבוצות כלשהן אזי

$span(A \cup B) = span(A) \cup span(B)$.

פתרון:

נפריך: ניקח $V = \mathbb{R}^2$, $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ אזי $span(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} | x \in \mathbb{R} \right\}$, $span(B) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} | y \in \mathbb{R} \right\}$
ולכן $span(A) \cup span(B)$ הוא איחוד של שני צירים אבל $span(A \cup B) = \mathbb{R}^2$ הוא כל המרחב.

שאלה 4

האם $\mathbb{R}^3 = span\{(2,0,4), (0,1,0), (6,5,12)\}$? אם כן הוכח, אם לא מצא וקטור שנמצא ב-$\mathbb{R}^3$ ולא ב-$span$.

פתרון:

יהי וקטור $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ נרצה לבדוק מתי הוא שייך ל-$span\{v_1, v_2, v_3\}$:

נבנה מטריצה $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 & x \\ 0 & 1 & 5 & y \\ 4 & 0 & 12 & z \end{pmatrix}$ לאחר דירוג נקבל $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & \frac{x}{2} \\ 0 & 1 & 5 & y \\ 0 & 0 & 0 & \frac{z-2x}{4} \end{pmatrix}$, למערכת הזאת קיים פתרון אם $z - 2x = 0$ ולכן נבחר וקטור ב-$\mathbb{R}^3$ שאינו מקיים את המשוואה הזו, למשל $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ הוא וקטור כזה.

שאלה 5

יהי $V = \mathbb{R}_3[x]$ ותהי

$$S = \left\{1 + x + x^2 + x^3, -1 + x^2, 1 - x + x^2 - x^3\right\}$$

1) אם $1 \in span\{S\}$?

פתרון:

האם ל-$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ יש פתרון. נדרג ונקבל את המטריצה הבאה:

ולכן יש למערכת הזאת פתרון, כלומר $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $1 \in span\left(S\right)$.

2) מצא $span\left(S\right)$(אלו תאים $a_0 + a_1x + cx^2 + dx^3$ חייב לקיים?)

נבנה את המטריצה הבא:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -1 & b \\ 1 & 1 & 1 & c \\ 1 & 0 & -1 & d \end{pmatrix}$$

ולאחר דירוג מקבלים:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -2 & b-a \\ 0 & 0 & 4 & c+a-2b \\ 0 & 0 & 0 & d-b \end{pmatrix}$$

ולכן יש פתרון רק אם $b - d = 0$ כלומר

$$span\left(S\right) = \left\{a + bx + cx^2 + dx^3 | b - d = 0\right\} = \left\{a + bx + cx^2 + bx^3\right\}$$

3) אם S היא בת"ל?

נבנה את המטריצה הבאה:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ולאחר דירוג מקבלים:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שזה גורר שרק הפתרון הטריביאלי פותר את המערכת כלומר S בת"ל.

שאלה 6

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ותהי $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ קבוצת וקטורים. נניח ש־v_n הוא וקטור שתלוי לינארית בוקטורים האחרים. הוכח ש־$span\left(S'\right) = span\left(S\right)$ כאשר $S' = \{v_1, v_2, ..., v_{n-1}\}$.

פתרון:

ברור ש־$span\left(S'\right) \subseteq span\left(S\right)$.

רוצים להוכיח את ההכלה ההפוכה. יהי $w \in span\left(S\right)$, צריך להוכיח ש־$w \in span\left(S'\right)$, כלומר צריך להוכיח ש־$w$ הוא צירוף ליארי של וקטורים של S'. לפי ההנחה נתון ש־v_n הוא תלוי לינארית בוקטורי S' ולכן הוא מהווה צירוף לינארי שלהם, כלומר $v_n = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_{n-1}v_{n-1}$, לפי הנחה $w \in span\left(S\right)$, ולכן

$$w = b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_{n-1}v_{n-1} + b_nv_n = b_1v_1 + \cdots + b_{n-1}v_{n-1} + b_n\left(a_1v_1 + \cdots + a_{n-1}v_{n-1}\right) = \left(b_1 + b_na_1\right)v_1 + \cdots + \left(b_{n-1} + b_na_{n-1}\right)v_{n-1}$$

קיבלנו ש־w הוא צ"ל של וקטורים ב־S' ולכן הוא שייך למרחב הנפרש על ידם ולכן $span\left(S\right) \subseteq span\left(S'\right)$, וזה מה שרצינו להוכיח.