

## תרגיל 11

1. יהיו  $(x_i, \tau_i)$  מרחבים דיסקרטיים. האם  $\prod(X_i, \tau_i)$  דיסקרטי? (רמז: תלוי).

2. יהי  $(X, d)$  מרחב מטרי. הוכיחו כי הפונקציה  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה.

3. יהי  $X$  מרחב טופולוגי, ו- $I$  קבוצת אינדקסים. נסמן ב- $X^I$  את מרחב המכפלה  $\prod_{i \in I} X$  ( $I$  עותקים של  $X$ ). לכל  $x \in X$  נסמן ב- $f^x$  את הוקטור ב- $X^I$  שכל רכיביו הם  $x$ . יהי  $Y = \{f^x : x \in X\}$  תת מרחב של  $X^I$ . הוכיחו ש- $X \cong Y$ .

4. הוכיחו שמכפלה של מרחבים שהם  $T_1$  היא  $T_1$ .

5. ענו על הסעיפים הבאים:

(א) יהי  $X$  מרחב טופולוגי דיסקרטי עם בסיס  $B$ . הוכיחו שלכל  $x \in X$ ,  $\{x\} \in B$ .  
(ב) יהי  $X$  מרחב טופולוגי עם בסיס  $B$ ,  $Y$  קבוצה, ו- $f : X \rightarrow Y$  פונקציה על. הוכיחו/הפריכו:  $B' = \{O \subseteq Y : f^{-1}(O) \in B\}$  הוא בסיס לטופולוגיית המנה על  $Y$ .

(ג) יהי  $\mathbb{R}_l$  הישר של סורגנפריי, ו- $f : \mathbb{R}_l \rightarrow \mathbb{Z}$  פונקציית הערך השלם. מהי טופולוגיית המנה של  $\mathbb{Z}$  ביחס ל- $f$ ?

6. נתבונן ב- $\mathbb{R}$  עם הטופולוגיה הסטנדרטית, וב- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$  פונקציית הערך השלם. נסמן ב- $\tau$  את טופולוגיית המנה על  $\mathbb{Z}$  ביחס ל- $f$ .

(א) הוכיחו שמתקיים:  $A \in \tau \iff (n-1 \in A \leftarrow n \in A)$ .

(ב) הסיקו כי  $\tau = \{\mathbb{Z}, \emptyset\} \cup \{(-\infty, M] \cap \mathbb{Z}, M \in \mathbb{Z}\}$ .

7. ענו על הסעיפים הבאים:

(א) יהיו  $X, Y$  מרחבים מטריים, ו- $f : X \rightarrow Y$  ו- $g : Y \rightarrow X$  פונקציות רציפות, כך ש- $f \circ g = id_Y$ . הוכיחו כי העתקת מנה.

(ב) תהי  $f : X \rightarrow Y$  העתקת מנה. הוכיחו ש- $f$  הומיאומורפיזם  $\iff f$  חח"ע.