# תרגול 6 – אנליזה מודרנית

**למת פאטו**

תזכורת: ראינו בהרצאה את למת פאטו האומרת שאם $f_n : X \to [0,\infty]$ , פונקציות מדידות אזי מתקיים $\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$ .

**דוגמא לאי שוויון חזק:**

נתבונן בממ"ח $(\mathbb{R}, L, m)$, ונגדיר סדרת פונקציות פשוטות ע"י $f_n(x) = \frac{1}{n}$ . קל לראות:

1. $\underline{\lim} f_n = 0$
2. לכל $n$ $\int_{\mathbb{R}} f_n dm = \infty$

ולכן האי-שוויון בלמת פאטו הוא חזק: $0 < \infty$.

1. תרגיל (למת פאטו ההפוכה) : הוכיחו כי אם $f_n : X \to \mathbb{R}^*$ פונקציות מדידות המוגדרות על הממ"ח $(X, S, \mu)$ . אם קיימת פונקציה אינטגרבילית $|f_n| \le g$ לכל $n$, אזי

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \le \int_X \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu$$

פתרון: נסתכל על סדרת הפונקציות $h_n = g - f_n$ , זוהי כמובן סדרה חיובית. בנוסף, $\int_X h_n d\mu = \int_X (g - f_n) d\mu = \int_X g d\mu - \int_X f_n d\mu$ , ולכן מוגדר היטב. כעת, עפ"י למת פאטו נקבל

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} (g - f_n) d\mu = \int_X \left(g + \liminf_{n\to\infty} (-f_n)\right) d\mu$$
$$= \int_X g d\mu + \int_X \liminf_{n\to\infty} (-f_n) d\mu = \int_X g d\mu - \int_X \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X (g - f_n) d\mu$$
$$= \int_X g d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int_X -f_n d\mu = \int_X g d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$
$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \le \int_X \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu$$

2. אם $f_n$ הינה סדרה של פונקציות אי-שליליות ואינגרביליות כך ש $f_n \downarrow f$ , הראו כי $\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$ .

פתרון: עפ"י למת פאטו נובע כי $\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu = \int_X f\, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$.

מצד שני, עפ"י למת פאטו ההפוכה, נובע כי $\limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \le \int_X \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu = \int_X f d\mu$.

לסיכום, קיבלנו $\limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \le \int_X f\, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$ , ומכאן ש $\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$

**התכנסות נשלטת**

תזכורת: יהיו $f_n : X \to \mathbb{R}^*$ פונקציות מדידות כך ש $f_n \to f$ , ונניח וקיימת פונקציה איטגרבילית $|f_n| \le g$ לכל $n$ . אזי $f_n$ ו $f$ אינטגרביליות ומתקיים

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f$$

3. תהי $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית ותהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ חסומה, מדידה (לבג) ורציפה בנקודה $x_0 = 1$ הוכיחו שהגבול $I = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f\left(1 + \frac{x}{n^2}\right) g(x) dx$ קיים, וחשבו אותו.

פתרון: נוכל לרשום את האינטגרל בצורה הבאה: $\int_{\mathbb{R}} f\left(1 + \frac{x}{n^2}\right) g(x) I_{(-n,n)}(x) dx$ .

נגדיר את סדרת הפונקציות המדידות $h_n(x)=f\left(1+\frac{x}{n^2}\right)g(x)I_{(-n,n)}(x)$ .

$f$ רציפה בנקודה 1 ולכן $\lim_{n\to\infty} f\left(1+\frac{x}{n^2}\right)=f(1)$ וקיימת פונקציית הגבול $h=f(1)g(x)I_{(-\infty,\infty)}(x)=f(1)g(x)$ . יהי $M$ חסם של $f$ . לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $|h_n(x)|\le M|g(x)|$ והפונקציה באגף ימין אינטגרבילית. ע"פ משפט ההתכנסות הנשלטת הגבול הוא $f(1)\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx$ .

4. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית, $a\in\mathbb{R}$ ונגדיר עבור $x>a$

$$F(x)=\int_{[a,x]} fdm$$

הראו כי $F$ רציפה.

פתרון: ניקח סדרה $a<x_n$ כך ש $x_n\to x$ . נגדיר $h_n=f1_{[a,x_n]}$ וברור כי $h_n\to f1_{[a,x]}$ או $h_n\to f1_{[a,x)}$ אשר שווֹת כב"מ ולכן האינטגרל שלהן זהה. כעת, מכיוון שהסדרה $x_n$ מתכנסת נובע כי מ $n$ מסויים $x_n<M$ , כאשר $x<M\in\mathbb{R}$ . נשים לב כי $|h_n|\le|f|$ וכן $|f|$ אינטגרבילית. מכאן שכל התנאים להתכנסות הנשלטת מתקיימים ולכן

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n)=\lim_{n\to\infty}\int_{[a,x_n]} fdm=\lim_{n\to\infty}\int h_n dm=\int_{[a,x]} fdm=F(x).$$

הגדרה: ממ"ח $(X,S,\mu)$ יקרא ממ"ח סיגמא סופי אם קיימות קבוצות מדידות $\{A_n\}$ כך ש $X=\bigcup A_n$ וגם $m(A_n)<\infty$ .

דוגמא: הממשיים עם לבג.

5. יהי $(X,S,\mu)$ ממ"ח סיגמא סופי. נניח ו $f$ הינה אינטגרבילית ואי שלילית. הוכיחו כי אם $\varepsilon>0$ אזי קיימת $A\in S$ כך ש $\mu(A)<\infty$ ומתקיים

$$\varepsilon+\int_A f>\int f .$$

פתרון: מכיוון ש $(X,S,\mu)$ הינו ממ"ח סיגמא סופי, נובע כי קיימת סדרה של קבוצות $A_n\in S$ כך ש $\mu(A_n)<\infty$ וגם $X=\bigcup_n A_n$ . ללא הגבלת הכלליות נניח כי $A_n$ זרות. נסמן $E_k=\bigcup_{n=1}^{k} A_n$ איחוד

סופי של קבוצות ונסמן $f_n = f1_{E_n}$ , הצימצום של $f$ על $E_n$ . מכיוון ש $X = \bigcup_k E_k$ נובע כי $f_n \to f$ , מכיוון ש $f$ אי שלילית נובע כי $f_n \uparrow f$ . נשתמש במשפט ההתכנסות המונוטונית של לבג להסיק ש $\int f = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f = \lim_{n\to\infty} \int f1_{E_n} = \lim_{n\to\infty} \int f_n$ . מכיוון ש $f \geq f_n$ נובע כי $\int f \leq \int_{E_n} f$ ומכאן ש $\int f \uparrow \int_{E_n} f$ . קל לראות כי $\mu(E_k) < \infty$ לכל $k$ וכי מהגדרת הגבול נובע כי $\int f > \int_{E_k} f + \varepsilon$ עבור $k$ מספיק גדול.

6. יהיו $f, f_n : X \to [0,\infty]$ פונקציות מדידות כך ש $f_n \to f$ כב"מ ו $f \geq f_n$ לכל $n$ . הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f$ .

פתרון:

נחלק לשני מקרים:

(1) $\int f = \infty$ : עפ"י למת פאטו נובע כי $\int \underline{\lim} f_n = \int f \leq \underline{\lim} \int f_n \Rightarrow \lim \int f = \infty$

(2) $\int f < \infty$ : אזי הסדרה $f_n$ נשלטת ע"י פונקציה אינטגרבילית $f$ ולכן ממשפט ההתכנסות הנשלטת נובע כי $\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f$.

7. יהי $(\Omega, S, \mu)$ מרחב מידה. נניח כי $X \subset \Omega$ כך ש $\mu(X) = 1$ וכך ש $A, B, C \subseteq X$ כך ש $\mu(A) + \mu(B) + \mu(C) \geq 2.5$ . האם ייתכן כי $A \cap B \cap C = \varnothing$ ?

פתרון: נניח בשלילה כי $A \cap B \cap C = \varnothing$ ונגדיר את הפונקציות $f = 1_A, g = 1_B, h = 1_C$ . מצד אחד $h + f + g \leq 2$ בגלל ש $A \cap B \cap C = \varnothing$ ולכן $\int f + g + h d\mu \leq 2$ . מצד שני $\int f + g + h d\mu = \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) \geq 2.5$ ולכן סתירה.