אינפי 1 – תרגול 6

תתי סדרות

תרגיל

תהי a_n סדרה כך שלכל $k\in\mathbb{N}$ מתקיים $a_{2k+1}<a_{2k-1} \quad \wedge \quad a_{2k+2}>a_{2k}$. הוכיחו כי a_n מתכנסת אמ"מ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+1}-a_n\right)=0$.

פתרון

$\Leftarrow$: נניח $a_n\to L$. a_{n+1} תת סדרה שלה ולכן $a_{n+1}\to L$. מאריתמטיקה של גבולות נקבל הדרוש.

$\Rightarrow$: נראה ש: $a_{2k}\to T, a_{2k-1}\to S$ ונוכיח ש- $S=T$ ולכן הסדרה המקורית מתכנסת לפי טענה מתרגול שעבר. נתחיל עם a_{2k-1}. זאת סדרה מונוטונית יורדת על פי הנתון. נראה שהיא חסומה מלרע. הסדרה $b_n=a_{n+1}-a_n\to 0$ ולכן גם תת הסדרה שלה $b_{2k}=a_{2k+1}-a_{2k}$ תתכנס לאפס. בפרט, עבור $\varepsilon=\frac{1}{2}$ קיים $k_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $k\ge k_0$ מתקיים $-\frac{1}{2}<a_{2k+1}-a_{2k}<\frac{1}{2}$. לכן $a_2-\frac{1}{2}\le a_{2k}-\frac{1}{2}<a_{2k+1}<\frac{1}{2}+a_{2k}$ החל מ- k_0. לכן $a_{2k+1}>\min\left\{a_2-\frac{1}{2},a_1,a_3,\dots,a_{2k_0-1}\right\}$ מה שאומר שהיא חסומה מלרע ולכן מתכנסת ל- S. באופן דומה ניתן להראות ש- a_{2k} עולה, חסומה מלעיל ולכן מתכנסת ל- T. כעת, מכיוון ש- $b_{2k}=a_{2k+1}-a_{2k}\to 0$ מחד, ומאידך נקבל $b_{2k}=a_{2k+1}-a_{2k}\to S-T$ (מיחידות הגבול) ש- $S=T$. מש"ל

תרגילים על גבול עליון ותחתון

תרגיל

יהיו $\{a_n\},\{b_n\}$ שתי סדרות כך ש- $\forall n\in\mathbb{N}$ מתקיים $a_n\le b_n$. הוכיחו/הפריכו:

א. $\overline{\lim}a_n\le\overline{\lim}b_n$

ב. $\overline{\lim}a_n\le\underline{\lim}b_n$

ג. $\underline{\lim}a_n\le\underline{\lim}b_n$

פתרון

א. הוכחה: $\overline{\lim}a_n$ הוא גבול חלקי (הגדול ביותר) של $\{a_n\}$ ולכן קיימת תת סדרה המתכנסת אליו: $\lim a_{n_k}\to\overline{\lim}a_n$. כעת, עבור אותה קבוצת

אינדקסים, $\overline{\lim} b_{n_k}$ הוא גבול חלקי של $\{b_{n_k}\}$ ולכן קיימת תת סדרה המתכנסת אליו: $\lim b_{n_{k_j}} = \overline{\lim} b_{n_k}$. מכיוון ש- $\{a_{n_{k_j}}\}$ היא תת סדרה של $\{a_{n_k}\}$ מתקיים $\lim a_{n_{k_j}} = \lim a_{n_k}$ (מהתכנסות הסדרה $\{a_{n_k}\}$). בנוסף, $a_{n_{k_j}} \le b_{n_{k_j}}$ ולכן $\lim a_{n_{k_j}} \le \lim b_{n_{k_j}}$. לסיכום, $\overline{\lim} a_n = \lim a_{n_{k_j}} \le \lim b_{n_{k_j}} \le \overline{\lim} b_n$.

ב. הפרכה: ניקח $a_n = b_n = (-1)^n$. אזי $\overline{\lim} a_n = 1, \underline{\lim} b_n = -1$.

ג. אתם תוכיחו בשיעורי הבית שמתקיים: $\underline{\lim} a_n = -\overline{\lim}(-a_n)$. כעת: $\underline{\lim} a_n \le \underline{\lim} b_n \iff -\overline{\lim}(-a_n) \le -\overline{\lim}(-b_n) \iff \overline{\lim}(-a_n) \ge \overline{\lim}(-b_n)$. אבל $a_n \le b_n$ ולכן $-a_n \ge -b_n$ ואז אי השוויון מתקיים לפי סעיף (א).

מש"ל

<u>תרגיל</u>

תהי $\{a_n\}$ סדרה של מספרים חיוביים ונניח שמתקיים $\overline{\lim} a_n \cdot \overline{\lim} \frac{1}{a_n} = 1$. הוכיחו ש- $\{a_n\}$ מתכנסת.

<u>פתרון</u>

תחילה נשים לב כי $\overline{\lim} a_n, \overline{\lim} \frac{1}{a_n} \in \mathbb{R}_+$. כמו כן, $\underline{\lim} a_n \ge 0$.

<u>טענת עזר</u>

תהי $\{a_n\}$ סדרת חיוביים, אזי:

א. $\underline{\lim} a_n = 0$ אמ"מ $\overline{\lim} \frac{1}{a_n} = \infty$

ב. $\underline{\lim} a_n = \infty$ אמ"מ $\overline{\lim} \frac{1}{a_n} = 0$

ג. אם $\underline{\lim} a_n \ne 0, \infty$ אז $\overline{\lim} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\underline{\lim} a_n}$

<u>הוכחת הטענה</u>

א. אם $\underline{\lim} a_n = 0$ אזי קיימת תת סדרה של חיוביים $a_{n_k} \to 0$ ולכן $\frac{1}{a_{n_k}} \to \infty$;

אבל $\frac{1}{a_{n_k}}$ היא תת סדרה של $\frac{1}{a_n}$ ולכן $\overline{\lim} \frac{1}{a_n} = \infty$ (ההוכחה בכיוון השני היא אנלוגית).

ב. באופן דומה לסעיף (א).

ג. שימו לב שמשני הסעיפים הקודמים, נובע כי $\overline{\lim} \frac{1}{a_n} \in \mathbb{R}_+$. נוכיח תחילה את אי השוויון $\overline{\lim} \frac{1}{a_n} \geq \frac{1}{\underline{\lim} a_n}$. מהגדרת $\underline{\lim}$ קיימת תת סדרה a_{n_k} כך ש- $a_{n_k} \to \underline{\lim} a_n \in \mathbb{R}_+$. לכן $\frac{1}{a_{n_k}} \to \frac{1}{\underline{\lim} a_n}$ ולכן $\frac{1}{\underline{\lim} a_n}$ הוא גבול חלקי של הסדרה $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ ובפרט $\overline{\lim} \frac{1}{a_n} \geq \frac{1}{\underline{\lim} a_n}$. בכיוון השני נוכיח $\overline{\lim} \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{\underline{\lim} a_n}$.

מהגדרת $\overline{\lim}$ קיימת תת סדרה $\left\{\frac{1}{a_{n_t}}\right\}_{t=1}^{\infty}$ כך ש- $\frac{1}{a_{n_t}} \to \overline{\lim} \frac{1}{a_n} \in \mathbb{R}_+$ ולכן $a_{n_t} \to \frac{1}{\overline{\lim} \frac{1}{a_n}}$. מכיוון ש- $\frac{1}{\overline{\lim} \frac{1}{a_n}}$ הוא גבול חלקי של $\{a_n\}$ נקבל $\frac{1}{\overline{\lim} \frac{1}{a_n}} \geq \underline{\lim} a_n$ ולכן $\overline{\lim} \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{\underline{\lim} a_n}$.

מש"ל טענת עזר

כעת נוכיח את הטענה בתרגיל. לפי ה"נשים לב" אנחנו נמצאים במצב (ג) של טענת העזר: $\overline{\lim} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\underline{\lim} a_n} \Leftarrow \underline{\lim} a_n = \frac{1}{\overline{\lim} \frac{1}{a_n}}$. מהנתון: $\overline{\lim} a_n = \frac{1}{\overline{\lim} \frac{1}{a_n}}$ ולכן $\overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n$. לפי משפט הסדרה מתכנסת (סדרה מתכנסת ל- L אמ"מ כל תתי הסדרות שלה מתכנסות ל- L אמ"מ $\overline{\lim} = \underline{\lim} = L$).

מש"ל

<u>סדרות קושי</u>

<u>הגדרה</u>

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה. אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $m,n \geq n_0$ מתקיים $|a_m - a_n| < \varepsilon$ אזי $\{a_n\}$ נקראת "סדרת קושי".

משפט

תהי $\{a_n\}\subseteq\mathbb{R}$. אזי $\{a_n\}$ מתכנסת ל-$L\in\mathbb{R}$ אמ"מ $\{a_n\}$ סדרת קושי.

תרגיל

תהי $\{a_n\}$ סדרה המקיימת: $|a_n-a_{n-1}|<\frac{1}{2^n}$ לכל $1<n\in\mathbb{N}$. הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

פתרון

נראה שזאת סדרת קושי. בה"כ נניח כי $m>n$. אזי מתקיים:

$$|a_m-a_n|=|a_m-a_{m-1}+a_{m-1}-\ldots+a_{n+1}-a_n|\le|a_m-a_{m-1}|+\ldots+|a_{n+1}-a_n|<\frac{1}{2^m}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}}=$$

$$=\frac{1}{2^{n+1}}\left[\frac{1}{2^{m-n-1}}+\ldots+1\right]=\frac{1}{2^{n+1}}\left[\frac{1-\frac{1}{2^{m-n}}}{1-\frac{1}{2}}\right]=\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^m}\le\frac{1}{2^n}\to 0$$

קל לראות שלכל $\varepsilon>0$ ניתן לבחור $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $m,n\ge n_0$ יתקיים $|a_m-a_n|<\frac{1}{2^n}<\varepsilon$. לכן זו סדרת קושי ולכן היא מתכנסת.

מש"ל

הגדרה שקולה לסדרת קושי

לכל $\varepsilon>0$ קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\ge n_0$ ולכל $k\in\mathbb{N}$ מתקיים $|a_n-a_{n+k}|<\varepsilon$.

הוכחה (לכך שההגדרות שקולות)

הגדרה מקורית גוררת את השקולה: נבחר בתפקיד n_0 את אותו n_0 ובתפקיד m את $n+k$.

הכיוון השני: ההגדרה המקורית שקולה ל: לכל $\varepsilon>0$ קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $m>n\ge n_0$ מתקיים $|a_n-a_m|<\varepsilon$ (מדוע?). מתקיים לכל $\varepsilon>0$ קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\ge n_0$ ולכל $k\in\mathbb{N}$ מתקיים $|a_n-a_{n+k}|<\varepsilon$. יהי $m>n\ge n_0$. נרצה להוכיח ש-$|a_n-a_m|<\varepsilon$. $m-n\in\mathbb{N}$ וניתן לבחור $k=m-n$ ולקבל הדרוש.

מש"ל

תרגיל

הוכיחו שהסדרה $a_n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}$ אינה מתכנסת במובן הצר.

<u>פתרון</u>

נראה שהיא אינה סדרת קושי. שלילת ההגדרה: קיים $\varepsilon>0$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ קיימים $k\in\mathbb{N}$, $n_0\ge n$, כך ש- $|a_n-a_{n+k}|\ge\varepsilon$

$$|a_n-a_{n+k}|=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}+\ldots+\frac{1}{2n+2k-1}\ge\frac{k}{2n+2k-1}\underset{choose\ k=n}{=}\frac{n}{4n-1}>\frac{n}{4n}=\frac{1}{4}$$

בחרנו $\varepsilon=\frac{1}{4}$, ואז לכל $n\in\mathbb{N}$ ניקח, למשל, $n_0=k=n$.

מש"ל

<u>תרגיל</u> (מהרצאה)

הוכיחו או הפריכו: a_n מתכנסת אמ"מ לכל $k\in\mathbb{N}$ מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+k}-a_n)=0$.

<u>פתרון</u>

הפרכה: ניעזר בסדרה מהתרגיל הקודם. נראה שהיא מקיימת את התנאי אך לא מתכנסת. יהי $k\in\mathbb{N}$. מתקיים $a_{n+k}-a_n=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}+\ldots+\frac{1}{2n+2k-1}\to 0$ (כי k קבוע, ויש לנו מספר סופי של סדרות שכל אחת מהן מתכנסת לאפס).

מש"ל

שאלה 5. תהי $\{a_n\}$ סדרה המקיימת $|a_{n+1}-a_n|\le 1/2$ לכל n. נתון כי 2008 ו- 2009 הם גבולות חלקיים שלה, הוכיחו כי ל- $\{a_n\}$ לפחות שלושה גבולות חלקיים.

פתרון. נניח בשלילה כי ל- $\{a_n\}$ יש רק שני גבולות חלקיים.

אזי, קיים N כך שלכל $n\ge N$ מתקיים $a_n\notin[2008+\frac{1}{4},2009-\frac{1}{4}]$: אחרת, יהיו אינסוף איברים של הסדרה בקטע הנ"ל ולכן לפי משפט בולצנו־ויירשטרס קיימת תת־סדרה המתכנסת לגבול חלקי נוסף בקטע בסתירה להנחה שלנו.

נבחר $k>N$ כך ש- $a_k>2009-\frac{1}{4}$: אכן קיים k כזה מכיוון ש- 2009 הוא גבול חלקי של הסדרה, ובכל סביבה שלו יש אינסוף איברים של $\{a_n\}$.

נגדיר $j:=\min\{n>k : a_n<2008+\frac{1}{4}\}$: אכן קיים j כזה מכיוון ש- 2008 הוא גבול חלקי של הסדרה (אחרת, יש מספר סופי של איברים בסביבה של 2008 בסתירה להנחה שלנו).

לכן על פי הבנייה קבלנו: $a_j<2008+\frac{1}{4}$, $a_{j-1}\ge 2008+\frac{1}{4}$.

אבל $a_{j-1}\ge 2009-\frac{1}{4}$ ולכן

$$a_{j-1}-a_j\ge 2009-\frac{1}{4}-2008+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

בסתירה לנתון בשאלה. לכן ההנחה אינה נכונה, כלומר ל- $\{a_n\}$ קיים גבול חלקי נוסף.