

תרגיל בית מספר 4

שאלה 1

האם הפונקציות הבאות אינטגרביליות בקטע $[0,1]$?

אם לא הסביר מדוע. אם כן מצאו את האינטגרל.

א. $f(x) = \tan(x+1)$

ב. $f(x) = \begin{cases} x & x = \frac{1}{n} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ $n \in \mathbb{N}$

ג. $f(x) = \frac{\sin \frac{1}{x^2}}{x}$

שאלה 2

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות עבור פונקציה f המוגדרת בקטע $[a,b]$.

א. אם $f(x) \geq 0$ ו $\int_a^b f(x)dx = 0$ אז $f \equiv 0$

ב. אם f רציפה כך שלכל פונקציה רציפה $g(x)$ המוגדרת בקטע $[a,b]$ מתקיים

$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ אז $f \equiv 0$

שאלה 3

הוכח כי $\frac{2}{\sqrt[4]{e}} \leq \int_0^2 e^{x^2-x} dx \leq 2e^2$

שאלה 4

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה. הוכח כי: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$

שאלה 5

הוכח את אי השוויון $2\sqrt{n+1} - 2 < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n+1} - 1$

שאלה 6

חשב את גבול הסדרה $a_n = \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}$

בהצלחה!!!