תרגיל 5 אינפי 1 למדמ"ח

עוד על נגזרת

1. חשבו את הנגזרות $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ עבור הפונקציות הבאות. אם לא נאמר אחרת בטאו את התשובה לפי x.

(א) $y = \sqrt[5]{2-3x}$

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{5}(2-3x)^{-\frac{4}{5}} \cdot (-3)$

(ב) $y = \cos\sqrt{x}$

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

(ג) $y = x^x$. $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = (x^x)' = (e^{xlnx})' = e^{xlnx}(lnx + x \cdot \frac{1}{x}) = e^{xlnx}(lnx+1)$

(ד) $y = e^{-x^2}$

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^{-x^2} \cdot (-2x)$

(ה) $y = \sin(2x)\cos^2(3x)$

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2\cos(2x)\cos^2(3x) - 6\sin(2x)\cos(3x)\sin(3x)$

(ו) $v = \frac{1}{x+1} \quad u = 3v+4 \quad y = \frac{1}{u}$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{u^2} \cdot 3 \cdot (-\frac{1}{(x+1)^2})$$
$$= \frac{3}{(3v+4)^2 \cdot (x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2(\frac{3}{x+1}+4)^2} = \frac{3}{4x+7}$$

(ז) $x = \frac{2t+1}{t+2} \quad y = \frac{2t+3}{t+2}$ (בטאו את התשובה לפי t ולפי x)

לפי t זה קל:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}} = \frac{\frac{2(t+2)-(2t+3)}{(t+2)^2}}{\frac{2(t+2)-(2t+1)}{(t+2)^2}} = \frac{2t+4-2t-3}{2t+4-2t-1} = \frac{1}{3}$$

היות שאין תלות ב t ולכן זו גם התשובה לפי x.

(ח) $x = e^t \quad y = \ln t$ (בטאו את התשובה לפי t ולפי x)

לפי t זה קל:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}} = \frac{\frac{1}{t}}{e^t} = \frac{1}{te^t}$$

לפי x זה גם לא קשה מדי: $t = \ln x$ ולכן

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\ln x e^{\ln x}} = \frac{1}{x\ln x}$$

2. גוף נע במישור לפי המשוואות

$$y=\sqrt{t} \quad x=\frac{1}{1-t^2}$$

מצאו את שיפוע הנתיב שבו הוא נע (מבוטא לפי t)
השיפוע שלו הוא $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{t}}}{-\frac{1}{(1-t^2)^2}(-2t)}=\frac{(1-t^2)^2}{4t\sqrt{t}}$$

3. באילו נקודות הפונקציה:

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{N}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

היא גזירה? חשבו את נגזרתה בכל נקודה בה היא גזירה.
בנקודות $x\notin\mathbb{N}$ הפונקציה גזירה וזה בגלל שלכל Δx אינפיניטיסימל

$$f(x+\Delta x)=0$$

ולכן

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=0$$

ולכן

$$f'(x)=0$$

בנקודות $x\in\mathbb{N}$ הפונקציה לא גזירה משום שלכל $\Delta x\neq 0$ מתקיים ש

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{-1}{\Delta x}$$

שזה מספר אינסופי.

4. נתון כי הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}ax+b & x\geq 0\\ \cos x & x<0\end{cases}$$

היא גזירה, מצאו את a,b. (רמז: שימו לב שאם ϵ אינפיניטיסימל אז $\cos\epsilon\approx 1$)
בכל נקודה $x\neq 0$ ברור שהפונקציה גזירה. הבעיה יכולה להיות רק ב $x=0$. צריך לוודא ש

$$\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$

הוא תמיד מספר סופי ותמיד בעל אותו חלק סטנדרטי. נשים לב ש:

$$\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{f(\Delta x)-b}{\Delta x}$$

אם $\Delta x \geq 0$ אז

$$\frac{f(\Delta x)-b}{\Delta x}=\frac{a\Delta x+b-b}{\Delta x}=a$$

ואם $\Delta x < 0$ אז

$$\frac{f(\Delta x)-b}{\Delta x}=\frac{\cos\Delta x-b}{\Delta x}$$

כדי שהמספר המתקבל יהיה סופי, חייבים ש $\cos\Delta x - b$ יהיה אינפיניטיסימל, וזה קורה רק אם $b=1$, כעת

$$\mathrm{st}(\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x})=\mathrm{st}(\frac{\cos\Delta x-\cos 0}{\Delta x})$$

שזו הנגזרת של $\cos x$ בנקודה $x=0$. כלומר

$$\mathrm{st}(\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x})=-\sin 0=0$$

לסיכום: $a=0$ ו $b=1$.

5. בתחום $-\frac{\pi}{2}\leq t\leq\frac{\pi}{2}$ נגדיר שתי פונקציות

$$y=\sin 2t \quad x=\sin t$$

מצאו את כל ערכי ה <u>x</u> בהם הנגזרת של y לפי x היא 0.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{2\cos 2t}{\cos t}$$

ערך זה מתאפס כאשר

$$\cos 2t=0$$

בתחום $-\frac{\pi}{2}\leq t\leq\frac{\pi}{2}$ זה קורה כאשר $t=\pm\frac{\pi}{4}$. בנקודות אלה הערך של x הוא:

$$x=\pm\sin\frac{\pi}{4}=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

וזו התשובה.

6. תהי f גזירה ב x_0 ו gפונקציה שאינה גזירה ב x_0. איזה מהטענות הבאות נכונה? הסכום $f+g$:

(א) תמיד גזיר ב x_0.

(ב) תמיד לא גזיר ב x_0.

(ג) לא ניתן לקבוע (כלומר: קיימות f,g שעבורן הסכום גזיר וכאלה שעבורן הסכום לא גזיר).
הוכיחו טענתכם.
תמיד לא גזיר. נניח בשלילה שהסכום $f+g$ גזיר ב x_0. אז היות ש

$$g = f + g - f$$

נקבל שגם g גזירה ב x_0 בתור סכום של פונקציות שתי גזירות ב x_0 ($f+g$ ו $-f$). זאת בסתירה לכך ש g לא גזירה ב x_0.

7. תהינה f,g פונקציות שאינן גזירות ב x_0. איזה מהטענות הבאות נכונה? הסכום $f+g$:

(א) תמיד גזיר ב x_0.

(ב) תמיד לא גזיר ב x_0.

(ג) לא ניתן לקבוע (כלומר: קיימות f,g שעבורן הסכום גזיר וכאלה שעבורן הסכום לא גזיר).
הוכיחו טענתכם.
אי אפשר לקבוע. ייתכן ש $f(x)=|x|$ ו $g(x)=-|x|$ ואז סכומם 0 שזו פונקציה גזירה בכל נקודה .
וייתכן ש $f(x)=|x|$ ו $g(x)=|x|$ ואז סכומם $2|x|$ שזו שוב פונקציה לא גזירה ב $x=0$.