אלגברה לינארית 1 - הרצאה 8

תזכורות:

V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$.

$B \subseteq V$ <u>בסיס</u> של V אם היא קבוצה בת"ל ופורשת את V.

ראינו:

- ביחס לבסיס לכל $v \in V$ יש הצגה יחידה כצירוף לינארי של איברי B.
- בת"ל מקסימלית = בסיס; פורשת מינימלית = בסיס.
- כל קבוצה בת"ל אפשר להרחיב לבסיס;
  כל קבוצה פורשת אפשר לצמצם לבסיס.

$\dim V = |B|$.

- משפט השליש חינם: תהי $S \subseteq V$, אם שניים מהבאים מתקיימים גם השלישי נכון:
  - S בת"ל.
  - S פורשת את V.
  - $|S| = \dim V$.

אם התנאים מתקיימים אז S הוא גם בסיס.

<u>דוגמה:</u>

$$V = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(1)=0,\ p(2)=0\}$$

איך אפשר לתאר את V?

- כאוסף פתרונות של מערכת משוואות הומוגנית

$$V=\{a+bx+cx^2+dx^3\in\mathbb{R}_3[x] \mid \left.\begin{matrix} a+b+c+d=0 \\ a+2b+4c+8d=0 \end{matrix}\right\} \}\quad \begin{matrix} p(1)=0 \\ p(2)=0 \end{matrix}$$

• בצורה פרמטרית

כדי למצוא אותה ממערכת המשוואות, פותרים את המערכת.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\leftarrow R_2-R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{R_1\leftarrow R_1-R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

המשתנים החופשיים הם c,d. $\quad \begin{matrix} c=t \\ d=s \end{matrix}$

$a=2t+6s \quad , \quad b=-3t-7s$

מקבלים את ההצגה הפרמטרית של V:

$$V=\{(2t+6s)-(3t+7s)x+tx^2+sx^3 \mid t,s\in\mathbb{R}\}$$

• ע"י קבוצה פורשת/בסיס.

נתבונן באיבר הכללי

$$(2t+6s)-(3t+7s)x+tx^2+sx^3=$$
$$=t(2-3x+x^2)+s(6-7x+x^3)$$

$$V=\text{Span}\{2-3x+x^2,\ 6-7x+x^3\}$$

$\begin{matrix} t=1 \\ s=0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} t=0 \\ s=1 \end{matrix}$

איך חוזרים מקבוצה פורשת לפתרון מערכת משוואות?

שואלים מתי $a+bx+cx^2+dx^3\in V$?

$a+bx+cx^2+dx^3\in V \iff$ קיימים $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ שעבורם $\alpha(2-3x+x^2)+\beta(6-7x+x^3)=a+bx+cx^2+dx^3$

$$(2\alpha+6\beta)-(3\alpha+7\beta)x+\alpha x^2+\beta x^3=a+bx+cx^2+dx^3$$

מקבלים מערכת משוואות על α,β, והשאלה היא למילו ערכי a,b,c,d יש לה פתרון. (לפחות אחד)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 6 & a \\ -3 & -7 & b \\ 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & d \end{array}\right) \xrightarrow[R_2\leftrightarrow R_4]{R_1\leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & d \\ 2 & 6 & a \\ -3 & -7 & b \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[R_4\leftarrow R_4+3R_1]{R_3\leftarrow R_3-2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & d \\ 0 & 6 & a-2c \\ 0 & -7 & b+3c \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[R_4\leftarrow R_4+7R_2]{R_3\leftarrow R_3-6R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & a-2c-6d \\ 0 & 0 & b+3c+7d \end{array}\right)$$

יש פתרון $\iff$ אין שורת סתירה $\iff$ $\begin{cases} a-2c-6d=0 \\ b+3c+7d=0 \end{cases}$

לכן

$$V=\left\{a+bx+cx^2+dx^3\in\mathbb{R}_3[x] \;\middle|\; \begin{cases} a-2c-6d=0 \\ b+3c+7d=0 \end{cases}\right\}$$

$$a+b+c+d=0$$
$$a+2b+4c+8d=0$$

סיסים ומימדים לחיתוך ולסכום תת-מרחבים

$U,W\leq V$.

ראינו: $U\cap W$, $U+W$ הם תת-מרחבים של V.

$$U+W = \{u+w \mid u\in U, w\in W\}$$

טענה: (מהש"ב)

לכל $S_1,S_2\subseteq V$ תת-קבוצות

$$Span(S_1\cup S_2)=\underbrace{Span(S_1)}_{U}+\underbrace{Span(S_2)}_{W}$$

מסקנה:

אם נתונות קבוצות פורשות S_1 של U ו-S_2 של W,

אז $S_1\cup S_2$ היא קבוצה פורשת של $U+W$.

איך נשיג מתוכה בסיס? כמו שאמרנו בפעם הקודמת - נשים בעמודות מטריצה, נדרג, וניקח את הווקטורים מהאיחוד המקורי שבעמודות שלהם בצורה המדורגת יש איבר מוביל.

הערה:

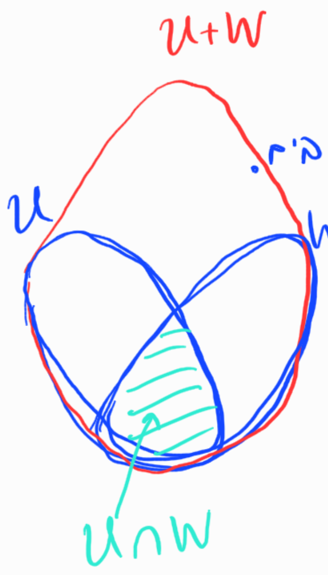
באופן כללי $Span(S_1\cap S_2)\neq Span(S_1)\cap Span(S_2)$.

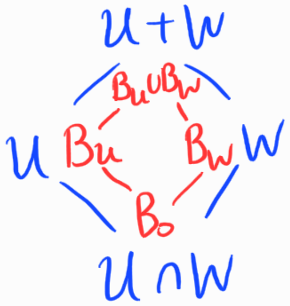
איך נמצא בסיס לחיתוך $U\cap W$? נתאר את U ואת W כאוסף הפתרונות של מערכת משוואות, ואז $U\cap W=$ כל הווקטורים שמקיימים את המשוואות של U וגם של W.

משפט: (משפט המימדים)

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, ויהיו $U,W\leq V$ תת-מרחבים.

$$\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)$$





<u>הוכחה:</u>

יהי בסיס $B_0=\{v_1,\dots,v_k\}$ של $U\cap W$.

$B_0\subseteq U$ קבוצה בת"ל, לכן אפשר להרחיב אותה לבסיס $B_U=\{v_1,\dots,v_k,u_1,\dots,u_\ell\}$ של U.

$B_0\subseteq W$ קבוצה בת"ל, לכן אפשר להרחיב אותה לבסיס $B_W=\{v_1,\dots,v_k,w_1,\dots,w_m\}$ של W.

מטרה: להוכיח $B_U\cup B_W=\{v_1,\dots,v_k,u_1,\dots,u_\ell,w_1,\dots,w_m\}$ בסיס של $U+W$.

למה זה מספיק? נניח שהוכחנו.

$$\dim(U\cap W)=k$$
$$\dim U=k+\ell\,,\qquad \dim W=k+m$$
$$\dim(U+W)=k+\ell+m$$

ואז באמת

$$\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)=(k+\ell)+(k+m)-k=k+\ell+m=\dim(U+W)$$

לכן צריך להוכיח ש-$B_U\cup B_W$ בסיס.

$\boxed{B_U\cup B_W \text{ בת"ל}}$ יהי צירוף לינארי מתאפס

$$(*)\quad \alpha_1v_1+\dots+\alpha_kv_k+\beta_1u_1+\dots+\beta_\ell u_\ell+\gamma_1w_1+\dots+\gamma_mw_m=0$$

צ"ל $\alpha_1=\dots=\alpha_k=\beta_1=\dots=\beta_\ell=\gamma_1=\dots=\gamma_m=0$.

$$\underbrace{\underbrace{\alpha_1v_1+\dots+\alpha_kv_k}_{\in U\cap W}+\underbrace{\beta_1u_1+\dots+\beta_\ell u_\ell}_{\in U}}_{\in U}=\underbrace{-\gamma_1w_1-\dots-\gamma_mw_m}_{\in W}\ \in U\cap W$$

לכן הווקטור שכתוב באגף ימין נמצא למעשה ב-$U\cap W$.

$\{v_1,\dots,v_k\}$ בסיס של $U\cap W$, בפרט פורשת, לכן קיימים $\delta_1,\dots,\delta_k\in\mathbb{F}$ שעבורם

$$-\gamma_1 w_1 - \dots - \gamma_m w_m = \delta_1 v_1 + \dots + \delta_k v_k$$

$$\gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_m w_m + \delta_1 v_1 + \dots + \delta_k v_k = 0$$

אבל $\{v_1,\dots,v_k,w_1,\dots,w_m\}$ בסיס של W, בפרט בת"ל, ולכן

$$\gamma_1 = \dots = \gamma_m = \delta_1 = \dots = \delta_k = 0$$

נחזור לצירוף (*) המקורי. נקבל

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_\ell u_\ell = 0$$

אבל $\{v_1,\dots,v_k,u_1,\dots,u_\ell\}$ בסיס של U, בפרט בת"ל, ולכן

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_k = \beta_1 = \dots = \beta_\ell = 0.$$

מסקנה: $B_U \cup B_W$ בת"ל.

$\boxed{B_U\cup B_W \text{ פורשת}}$ יהי $v\in U+W$. לכן קיימים $u\in U$ ו-$w\in W$ שעבורם

$$v = u + w.$$

$u\in U$, $\{v_1,\dots,v_k,u_1,\dots,u_\ell\}$ בסיס של U, בפרט פורשת, לכן קיימים $\alpha_i,\beta_i\in\mathbb{F}$ שעבורם

$$u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_\ell u_\ell$$

$w\in W$, $\{v_1,\dots,v_k,w_1,\dots,w_m\}$ בסיס של W, בפרט פורשת, לכן קיימים $\gamma_i,\delta_i\in\mathbb{F}$ שעבורם

$$w = \gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_k v_k + \delta_1 w_1 + \dots + \delta_m w_m,$$

מסקנה:

$$v = u + w = (\alpha_1+\gamma_1)v_1 + \dots + (\alpha_k+\gamma_k)v_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_\ell u_\ell + \delta_1 w_1 + \dots + \delta_m w_m.$$

הראינו ש-$B_U\cup B_W$ בת"ל ופורשת את $U+W$, לכן בסיס של $U+W$.

$\square$

תזכורת:

אומרים שהסכום $U+W$ ישר אם $U\cap W=\{0_V\}$.

מסקנה:

הסכום $U+W$ ישר $\Longleftrightarrow$ $\dim(U+W)=\dim U+\dim W$.

מרחבי המטריצה

הגדרה:

תהי $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ מטריצה, מגדירים לה שלושה תת-מרחבים:

א. **מרחב השורות של A** = תת-המרחב של $\mathbb{F}^n$ שנפרש ע"י השורות של A
$R(A)=\mathrm{Span}\{R_1(A),\dots,R_m(A)\}\subseteq\mathbb{F}^n$.

ב. **מרחב העמודות של A** = תת-המרחב של $\mathbb{F}^m$ שנפרש ע"י העמודות של A
$C(A)=\mathrm{Span}\{C_1(A),\dots,C_n(A)\}\subseteq\mathbb{F}^m$.

ג. **מרחב האפס של A** = תת המרחב של הפתרונות למערכת ההומוגנית המתאימה ל-A:
$N(A)=\{v\in\mathbb{F}^n \mid A\cdot v=0\}$.

הערה:

נחשוב על כל המרחבים האלו כעל וקטורי עמודה / ח-יות n-יות ו-m-יות.

דוגמה:

$A=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&2\end{pmatrix}}_{U}\in\mathbb{R}^{2\times 3}$.

$z=t$
$x=-2t$
$y=-2t$

$R(A)=\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right\}\subseteq\mathbb{R}^3$

$C(A)=\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right\}=\mathbb{R}^2$

$N(A)=\left\{\begin{pmatrix}-2t\\-2t\\t\end{pmatrix}\,\middle|\, t\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}\subseteq\mathbb{R}^3$

שימו לב:

$\dim R(A) = \dim C(A) = 2$

$\dim N(A) = 1 = 3 - \underset{\dim C(A)}{\underset{''}{2}}$

"מספר העמודות"

טענה:

לכל $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $C(A) = \{Av \mid v \in \mathbb{F}^n\}$.

הוכחה:

נזכור כי

$$\begin{pmatrix} | & & | \\ C_1(A) & \cdots & C_n(A) \\ | & & | \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \alpha_1 C_1(A) + \cdots + \alpha_n C_n(A)$$

לכן $w \in C(A) \iff$ קיימים $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ שעבורם $w = \alpha_1 C_1(A) + \cdots + \alpha_n C_n(A)$

$\iff w = A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \iff w = A \cdot v$ לאיזשהו $v \in \mathbb{F}^n$.

$\square$

מסקנה:

תהי $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, ויהי $b \in \mathbb{F}^m$. למערכת $Ax = b$ קיים פתרון (לפחות אחד) אם ורק אם $b \in C(A)$.

תזכורת:

יהיו $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{F}^{n\times k}$.

כפל עמודה - עמודה: $C_i(AB) = A \cdot C_i(B)$

כפל שורה - שורה: $R_i(AB) = R_i(A) \cdot B$

טענה:

יהיו $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ ו- $B\in\mathbb{F}^{n\times k}$ מטריצות. אזי $C(AB)\subseteq C(A)$

$R(AB)\subseteq R(B)$

הוכחה:

נוכיח $C(AB)\subseteq C(A)$. לפי ההגדרה,

$$C(AB)=\mathrm{Span}\{C_1(AB),\dots,C_k(AB)\}\subseteq\mathbb{F}^m$$

נראה שלכל $1\le i\le k$, $C_i(AB)\in C(A)$.

$$C_i(AB)\underset{\text{כפל עמודה-עמודה}}{=}A\cdot\underbrace{C_i(B)}_{\substack{v\ \text{וקטור}\\ \in\mathbb{F}^n}}\underset{\text{הטענה הקודמת}}{\in}C(A)$$

$C(A)=\{A\cdot v\mid v\in\mathbb{F}^n\}$

כך מצאנו $C_1(AB),\dots,C_k(AB)\in C(A)$ $\Leftarrow$ $C(AB)=\mathrm{Span}\{C_1(AB),\dots,C_k(AB)\}\subseteq C(A)$.

עבור מרחב השורות — בדומה.

$\square$

הערה:

$R(A^t)=C(A)$, $C(A^t)=R(A)$.

משפט:

תהי $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ מטריצה. אזי $\dim R(A)=\dim C(A)$.

הוכחה:

נסמן $k=\dim C(A)$. לכן קיימים $v_1,\dots,v_k\in\mathbb{F}^m$ כך ש- $\{v_1,\dots,v_k\}$ בסיס של $C(A)$. נסמן מטריצה

$$B=\begin{pmatrix}|&&|\\ v_1&\cdots&v_k\\ |&&|\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{m\times k}.$$

כל עמודה ב-A היא צירוף לינארי של עמודות B. לכן לכל $1\le i\le n$

קיים $u_i\in\mathbb{F}^k$ כך ש-$C_i(A)=Bu_i$.

נגדיר מטריצה $X\in\mathbb{F}^{k\times n}$ לפי $X=\begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_n \\ | & & | \end{pmatrix}$.

לפי כפל עמודה-עמודה,

$$BX=B\cdot\begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_n \\ | & & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} | & & | \\ Bu_1 & \cdots & Bu_n \\ | & & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} | & & | \\ C_1(A) & \cdots & C_n(A) \\ | & & | \end{pmatrix}=A.$$

כלומר $\underline{\underline{A=BX}}$. לכן $R(A)\underset{A=BX}{=}R(BX)\underset{\text{טענה קודמת}}{\subseteq}R(X)$.

אבל $X\in\mathbb{F}^{k\times n}$, לכן $R(X)=Span\{R_1(X),\dots,R_k(X)\}$, ובפרט $\dim R(X)\le k$.

$R(A)\subseteq R(X)\Rightarrow \dim R(A)\le\dim R(X)\le k=\dim C(A)$.

הראינו שלכל מטריצה $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$, $\boxed{\dim R(A)\le\dim C(A)}$.

בפרט אפשר להציב את A^t בפנים:

$$\dim R(A^t)\le\dim C(A^t)$$

$$\boxed{\dim C(A)\le\dim R(A)}$$

לכן $\dim R(A)=\dim C(A)$. □

הגדרה:

תהי $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ מטריצה. <u>הדרגה</u> של A היא

$$\underbrace{rank(A)=r(A)}_{\text{סימונים}}=\dim R(A)=\dim C(A)$$

<u>האפסיות</u> של A היא $\nu(A)=\dim N(A)$.

דוגמה:

בדוגמה שראינו קודם, $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&2\end{pmatrix}$, $\operatorname{rank}(A)=2$.

דוגמה:

$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$, $\operatorname{rank}(A)=1$.

משפט:

יהיו $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ ו- $B\in\mathbb{F}^{n\times k}$. אז $\operatorname{rank}(AB)\le\min\{\operatorname{rank}(A),\operatorname{rank}(B)\}$.

הוכחה:

צ"ל $\operatorname{rank}(AB)\le\operatorname{rank}(A)$ וגם $\operatorname{rank}(AB)\le\operatorname{rank}(B)$.

יודעים

$C(AB)\subseteq C(A) \Leftarrow \operatorname{rank}(AB)=\dim C(AB)\le\dim C(A)=\operatorname{rank}(A)$

$R(AB)\subseteq R(B) \Leftarrow \operatorname{rank}(AB)=\dim R(AB)\le\dim R(B)=\operatorname{rank}(B)$

$\square$

מסקנה:

תהי $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ כלשהי, ותהי $P\in\mathbb{F}^{m\times m}$ הפיכה. אז $\operatorname{rank}(PA)=\operatorname{rank}(A)$.

הוכחה:

מהמשפט הקודם, $\operatorname{rank}(PA)\le\operatorname{rank}(A)$. מצד שני,

$$\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(\underbrace{I_m}_{P^{-1}P}A)=\operatorname{rank}(\underbrace{P^{-1}}_{A}\underbrace{(PA)}_{B})\underset{\text{מהמשפט הקודם}}{\le}\operatorname{rank}(PA)$$

ביחד נקבל שוויון.

$\square$

מסקנה:

אם A ו- B שקולות שורה, אז $R(A)=R(B)$.
בפרט, $R(A)=R(CF(A))$.

[A ו-B שקולות שורה $\Longleftrightarrow$ $B=PA$ עבור P הפיכה]

הוכחה:

אם A ו-B שקולות שורה אז קיימת מטריצה הפיכה P כך ש- $B=PA$.
מצד אחד, $R(B)=R(PA)\subseteq R(A)$
מצד שני, $\dim R(B)=\mathrm{rank}(B)\underset{\uparrow}{=}\mathrm{rank}(A)=\dim R(A)$.

המסקנה הקודמת

אז $R(B)$ תת-מרחב של $R(A)$ מאותו מימד, ולכן $R(A)=R(B)$.

$\square$

דוגמה:

$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. A ו-B שקולות שורה.

$$R(A)=\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}=R(B)$$

$$C(A)=\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}\neq \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}=C(B)$$

אלגוריתם למציאת בסיסים לכל מרחבי המטריצה:

נתונה $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$.

א. מדרגים את A לצורה מדורגת.

ב. עבור $R(A)$ - לוקחים את השורות הלא אפסיות של הצורה המדורגת.

עבור $C(A)$ - לוקחים את העמודות מ-A המקורית שבעמודות המתאימות להן יש משתנה תלוי.

עבור $N(A)$ - מוצאים את הפתרון הכללי למערכת שמתאימה ל-A = לצורה המדורגת.

דוגמה:

$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$.

$$A \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

בסיס ל-$R(A)$ = $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$.

$\Leftarrow$ $rank(A)=2$

בסיס ל-$C(A)$ = $\left\{\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix}\right\}$.

מסקנה:

א. $rank(A)$ = מספר המשתנים התלויים בצורה מדורגת של A = מספר האיברים המובילים = מספר השורות שלא שוות אפס בצורה מדורגת.

ב. $\dim N(A)$ = מספר המשתנים החופשיים בצורה מדורגת של A.

ג. $rank(A)+\dim N(A)$ = מספר העמודות של A.

משפט:

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית. התנאים הבאים שקולים:

א. A הפיכה.

ב. לכל $b\in\mathbb{F}^n$ קיים פתרון יחיד למערכת $Ax=b$.

ג. קיים $b\in\mathbb{F}^n$ כך שלמערכת $Ax=b$ יש פתרון יחיד.

ד. $N(A)=\{0\}$, כלומר למערכת $Ax=0$ קיים פתרון יחיד.

ה. עמודות A בת"ל.

ו. עמודות A מהוות בסיס ל-$\mathbb{F}^n$.

ג. $\text{rank}(A)=n$.

ח. שורות A בת"ל.

ט. שורות A מהוות בסיס ל-$\mathbb{F}^n$.

[עוד שקולים: $R(A)=\mathbb{F}^n$, $C(A)=\mathbb{F}^n$, $CF(A)=I_n$, קיימת B כך ש-$AB=I$ ...]

<u>הוכחה:</u>

$\boxed{א \Leftarrow ב}$ נתון ש-A הפיכה. צ"ל שלכל $b\in\mathbb{F}^n$ קיים פתרון יחיד ל-$Ax=b$.

הוכחנו את זה כבר - הפתרון $x=A^{-1}b$.

$\boxed{ב \Leftarrow ג}$ ברור.

$\boxed{ג \Leftarrow ד}$ ידוע שקיים $b\in\mathbb{F}^n$ שעבורו למערכת $Ax=b$ יש פתרון יחיד.

הוכחנו:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{פתרונות של}\\ Ax=b\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\text{פתרונות של}\\ Ax=0\end{array}\right\} + \begin{array}{c}\text{פתרון}\\ \text{פרטי של } Ax=b\end{array}$$

לכן גם למערכת ההומוגנית $Ax=0$ יש פתרון יחיד.

$\boxed{ד \Leftarrow ה}$ ידוע $N(A)=\{0\}$. צ"ל שעמודות A בת"ל.

יהי צירוף לינארי מתאפס

$$\alpha_1 C_1(A)+\dots+\alpha_n C_n(A)=0$$

$$\parallel$$

$$A\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

לכן $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\in N(A)$. אבל $N(A)=\{0\}$, לכן $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$,

כלומר $\alpha_1=\dots=\alpha_n=0$.

$\boxed{ה \Leftarrow ו}$ ידוע שעמודות A בת"ל. צ"ל שהן מהוות בסיס של $\mathbb{F}^n$.

$C_1(A),\dots,C_n(A)$ הן n וקטורים בת"ל ב-$\mathbb{F}^n$. לכן, לפי משפט השליש חינם, הן בסיס של $\mathbb{F}^n$.

$\boxed{ו \Leftarrow ג}$ ידוע שעמודות A מהוות בסיס של $\mathbb{F}^n$. צ"ל $\operatorname{rank}(A)=n$.

מכך שהעמודות של A מהוות בסיס של $\mathbb{F}^n$ נובע $C(A)=\mathbb{F}^n$.

לכן $\operatorname{rank}(A)=\dim C(A)=\dim\mathbb{F}^n=n$.

$\boxed{ג \Leftarrow א}$ ידוע $\operatorname{rank}(A)=n$. נראה ש-A הפיכה.

ניזכר שמתקיים A הפיכה $\Longleftrightarrow CF(A)=I_n$.

מצד שני, ראינו כי $R(CF(A))=R(A)$. לכן

$$\operatorname{rank}(CF(A))=\operatorname{rank}(A)=n$$

אבל הדרוג היחידה שבה יקרה הוא אם $CF(A)=I_n$ (אחרת יהיו בה שורות אפסים והדרגה תהיה נמוכה יותר).

זה מראה ש-$CF(A)=I_n$, לכן A הפיכה.

$\boxed{א \Leftrightarrow ח}$ A הפיכה $\Longleftrightarrow$ A^t הפיכה $\Longleftrightarrow$ עמודות A^t בת"ל $\Longleftrightarrow$ שורות A בת"ל.

$\boxed{א \Leftrightarrow ט}$ A הפיכה $\Longleftrightarrow$ A^t הפיכה $\Longleftrightarrow$ עמודות A^t מהוות בסיס ל-$\mathbb{F}^n$ $\Longleftrightarrow$ שורות A מהוות בסיס ל-$\mathbb{F}^n$.

$\square$

תרגיל:

נסו להוכיח כמה שיותר מהשקילויות האלו ישירות.