אלגברה לינארית 2, מדעי המחשב, סמסטר קיץ תשעט, מועד ב'

מרצה: תמר בר-און.
מתרגל: אריאל ויצמן.
ענו כל השאלות.
משקל כל שאלה: 27 נקודות.
בשאלות חישוביות, יש להראות במפורש את כל החישובים.
חומר עזר: מחשבון פשוט.
בהצלחה!

1. תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. לכסנו את A^4. כלומר, מצאו מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D כך $P^{-1}A^4P = D$.

פתרון:

ראשית, נלכסן את A.

הפ"א של A הוא $(x-1)(x-2)(x+2)$. לכן $D' = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$.

נמצא ו"ע.

$$V_1 = N\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right) = span\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V_2 = N\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \text{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$V_{-2} = N\left(\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}\right) = span\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכן אם נסמן $P' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ נקבל $P'^{-1}AP' = D'$. נעלה ברביעית את המשוואה ונקבל $P'^{-1}A^4P' = (P'^{-1}AP')^4 = D'^4$. לסיכום, נקח $D = D'^4 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 16 & \\ & & 16 \end{pmatrix}$ ו-$P = P'$.

2. נגדיר מכפלה פנימית חדשה על R^2:

$$\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

בנוסף, נסמן ב$\langle , \rangle_S$ את המכפלה פנימית הסטנדרטית על $\mathbb{R}^2$. כלומר,

$$\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle_S = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

נגדיר $T : (\mathbb{R}^2, \langle , \rangle) \to (\mathbb{R}^2, \langle , \rangle_S)$, כלומר, מ$\mathbb{R}^2$ עם המכפלה הפנימית החדשה, ל$\mathbb{R}^2$ עם הכפלה הפנימית הסטנדרטית.

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ -x \end{pmatrix}$$

חשבו במפורש את T^*. האם T העתקה נורמלית?

פתרון:

ראשית, נמצא בסיס או"נ B ל$\mathbb{R}^2$ עפ המ"פ החדשה.

נפעיל גראם שמידט על $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$$\tilde{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle}{|| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ||^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ולבסוף ננרמל: (נשים לב שהוקטורים כבר מנורמלים)

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

כעת נייצג את T לפי בסיסים או"נ.

$$[T]_S^B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

לפי משפט מההרצאה,

$$[T^*]_B^S = \left([T]_S^B \right)^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

לכן $\begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = [T^*]_B^S\,[I]_S^B = [T^*]_S^S$.

כלומר,

$$T^* \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x-5y \\ -3x+2y \end{pmatrix}$$

לבסוף, בשביל לבדוק אם T נורמלית צריך לבדוק אם $TT^* = T^*T$.

חישוב פשוט מראה כי

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן T אינה נורמלית.

3. יהי V ממ"פ, $T: V \to V$ העתקה צמודה לעצמה, ו־$W \leq V$ תת מרחב T- אינוואריאנטי. (כלומר, לכל $w \in W$, $T(w) \in W$). הוכיחו או הפריכו: $W^\perp$ הוא T - אינוואריאנטי.

פתרון:

יהי $v \in W^\perp$ ו־$w \in W$. $\langle T(v), w\rangle = \langle v, T^*w\rangle = \langle v, Tw\rangle = 0$ מכיוון ש־$Tw \in W$. לכן לכל $v \in W^\perp$, $Tv \in W^\perp$. כלומר, $W^\perp$ הוא T- אינוואריאנטי.

4. תהי $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ מטריצה בעלת 4 ע"ע: ± 1 ו־$\pm i$. חשבו את A^4.

פתרון:

A מגודל 4×4 וכן יש לה 4 ע"ע שונים, לכן היא לכסינה. בנוסף, למטריצה האלכסונית שדומה לה יש את אותם ע"ע, ואילו איברי האלכסון. לכן קיימת P הפיכה כך ש $A = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & i & \\ & & & -i \end{pmatrix} P$. נעלה את המשוואה ברביעית ונקבל $A^4 = PIP^{-1} = I$.