הוכחה של נוסחת פיתוח דטרמיננטה לפי שורה

בועז צבאן

נתונה מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. יש להוכיח שלכל $i \in \{1,\dots,n\}$ מתקיים

$$.|A| = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}|A_{ij}|$$

הוכחה: $|A|$ מוגדרת כסכום של מכפלות הנקבעות על ידי תמורות מ S_n. נקבע $j \in \{1,\dots,n\}$ ונתבונן במכפלות

$$\operatorname{sign}(\sigma)a_{1,\sigma(1)}\dots a_{i,\sigma(i)}\dots a_{n,\sigma(n)}$$

שבהן מופיע a_{ij}, כלומר במקרים שבהם $\sigma(i)=j$. במקרה זה, המכפלה שווה ל

$$\operatorname{sign}(\sigma)a_{1,\sigma(1)}\dots a_{i,j}\dots a_{n,\sigma(n)} = a_{i,j}\operatorname{sign}(\sigma)a_{1,\sigma(1)}\dots a_{i-1,\sigma(i-1)}a_{i+1,\sigma(i+1)}\dots a_{n,\sigma(n)}$$

המכפלה האחרונה היא מכפלה של איברים, אחד מכל שורה ומכל עמודה של המינור $B=A_{ij}$. נסמן ב $\tau \in S_{n-1}$ את התמורה הבוחרת איברים אלה של B. אפשר להרחיב את τ לתמורה ב S_n על ידי הגדרת $\tau(n)=n$. בדיקה פשוטה מראה שמתקיים:

$$.\tau(k) = \begin{cases} \sigma(k) & k<i, \sigma(k)<j \\ \sigma(k)-1 & k<i, \sigma(k)>j \\ \sigma(k+1) & k\geq i, \sigma(k)<j \\ \sigma(k+1)-1 & k\geq i, \sigma(k)>j \end{cases}$$

במלים אחרות (בדוק!),

$$.\tau(k) = (n\ \ n-1\ \ \dots\ \ j+1\ \ j)\sigma(i\ \ i+1\ \ \dots\ \ n-1\ \ n)$$

לפיכך,

$$\operatorname{sign}(\tau) = (-1)^{n-j}\operatorname{sign}(\sigma)(-1)^{n-i} = (-1)^{2n-i-j}\operatorname{sign}(\sigma) = (-1)^{-i-j}\operatorname{sign}(\sigma)$$

ולכן $\operatorname{sign}(\sigma) = (-1)^{i+j}\operatorname{sign}(\tau)$. לכן, עבור תמורות $\sigma \in S_n$ המקיימות $\sigma(i)=j$:

$$\begin{aligned} &\operatorname{sign}(\sigma)a_{1,\sigma(1)}\dots a_{n,\sigma(n)} = \\ =\ \ & a_{i,j}\operatorname{sign}(\sigma)a_{1,\sigma(1)}\dots a_{i-1,\sigma(i-1)}a_{i+1,\sigma(i+1)}\dots a_{n,\sigma(n)} = a_{i,j}(-1)^{i+j}\operatorname{sign}(\tau)b_{1,\tau(1)}\dots b_{n,\tau(n)} \end{aligned}$$

כיון ש $\tau(n)=n$, הסימן של τ זהה לסימן שלו כשחושבים עליו כתמורה ב S_{n-1} (למשל, משום שמבנה המחזורים אינו מכיל את n). לכן,

$$\begin{aligned} &\sum_{\sigma\in S_n, \sigma(i)=j}\operatorname{sign}(\sigma)a_{1,\sigma(1)}\dots a_{n,\sigma(n)} = \\ =\ \ & a_{i,j}(-1)^{i+j}\sum_{\tau\in S_{n-1}}\operatorname{sign}(\tau)b_{1,\tau(1)}\dots b_{n,\tau(n)} = a_{i,j}(-1)^{i+j}|B| = a_{i,j}(-1)^{i+j}|A_{ij}| \end{aligned}$$

הדבר נכון לכל $i,j \in \{1,\dots,n\}$, ולכן

$$\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sign}(\sigma)a_{1,\sigma(1)}\dots a_{n,\sigma(n)} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{\sigma\in S_n,\sigma(i)=j}\operatorname{sign}(\sigma)a_{1,\sigma(1)}\dots a_{n,\sigma(n)} = \sum_{j=1}^{n}a_{ij}(-1)^{i+j}|A_{ij}|$$

מה שהיה עלינו להוכיח.