

תרגיל 1

1. הגדרה: נגיד שחוג R הוא חוג עם חילוק אם כל איבר שונה מס הפיך. נגיד שחוג R הוא תחום אם אין בו מחלקי 0.

- (א) הוכיחו שכל תחום סופי (כלומר, שמס' האיברים בו סופי) הוא חוג עם חילוק.
(ב) יהי R חוג עם חילוק, ו $S \subseteq R$ תת חוג. הוכיחו ש S תחום.
(ג) תנו דוגמא לחוג עם חילוק R ו $S \subseteq R$ תת חוג, כך ש S אינו חוג עם חילוק.

2. נגד שחוג R הוא בוליאני אם לכל $x \in R$ מתקיים: $x^2 = x$.

- (א) תנו דוגמא לחוג בוליאני.
(ב) הוכיחו שבכל חוג בוליאני מתקיים: $1 + 1 = 0$.
(ג) הוכיחו שכל חוג בוליאני הוא קומוטטיבי.

3. יהי $R = (P(X), \Delta, \cap, \emptyset, X)$ החוג מהתרגול. תנו דוגמא לתת חוג בלי יחידה $S \subseteq R$, שאין בו את היחידה של R . האם יש לו יחידה? האם קיים ל R תת חוג (כלומר, עם היחידה של R)?

4. יהי R חוג ו $\{S_i | i \in I\}$ משפחה של תת חוגים. הוכיחו ש $\bigcap_{i \in I} S_i$ הוא תת חוג.

5. יהי R חוג שבו כל איבר שונה מס הפיך מימין. הוכיחו ש R הוא חוג עם חילוק.

6. יהי R חוג חילופי, ויהיו $x, y \in R$. הוכיחו שאם xy הפיך, אז גם x וגם y הפיכים. הפריכו זאת במקרה הלא חילופי.

7. קבעו האם הבאים הם תתי חוגים של \mathbb{Q} :

- (א) $R = \left\{ \frac{m}{2^{n+1}} \mid n, m \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq \mathbb{Q}$
(ב) $R = \left\{ \frac{2n+1}{m} \mid n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \mathbb{Q}$