פונקציות של כמה משתנים.

1 ביוני 2014

[1]

הגדרות ב $\mathbb{R}^n$ (הכללה של $\mathbb{R}$)

1. $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots x_n) \,:\, x_i \in \mathbb{R}\}$
למשל $(1, \pi, -2) \in \mathbb{R}^3$

2. הגודל של $x = (x_1, x_2, \dots x_n)$ הוא

$$|x| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_i^2}$$

- (ב $\mathbb{R}$ זה פשוט $|x|$, ב $\mathbb{R}^2$ - זה $\sqrt{x^2+y^2}$ המרחק האוקלידי מראשית הצירים)
למשל $|(1,1,2)| = \sqrt{6}$

3. עבור $x = (x_1, x_2, \dots x_n)\,, y = (y_1, y_2, \dots y_n)$ המרחק בין x ל y - הוא

$$|x-y| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

למשל המרחק בין $(1,2)$ ל $(3,-5)$ הוא

$$\sqrt{(3-1)^2| + (-5-2)^2} = \sqrt{4+49} = \sqrt{54}$$

4. כדור (פתוח) n מימדי הוא ברדיוס r סביב $a \in \mathbb{R}^n$ הוא

$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |a-x| < r\}$$

- כל הנקודות הרחוקות מ a עד כדי r
למשל

(א) $a = (1,0)$ $r = 2$ הינו עיגול מלא ברדיוס 2 סביב הנקודה a

[1] במקומות הרלוונטים ניתן להחליף את התחום מ $\mathbb{R}^2$ לתחום פתוחה $U \subset \mathbb{R}^2$

(ב) $a=2$ עם רדיוס 1 זה הקטע הפתוח $(1,3)$

5. נאמר שגבול של סדרת נקודות $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}^n$ מתכנסת ל l אם לכל $\epsilon>0$ קיים n_0 טבעי כך

$$\forall n>n_0:|x_n-l|<\epsilon$$

שימו לב כי זה בדיוק הסימנים בהגדרה של גבול סדרות ב $\mathbb{R}$ אבל המשמעות משתנה לפי ההקשר.
משפט: התכנסות של סדרת נקודות $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}^n$שקולה להתכנסות רכיב רכיב
דוגמא מה הגבול של סדרת הנקודות $x_n=\left((1+\frac{2}{n})^n,\,\frac{1}{n}\right)$ ב $\mathbb{R}^2$
פתרון: לפי התנכנסות רכיב רכיב נסיק כי נקודת הגבול היא $\left(e^2,\,0\right)$

רציפות פונקציה

1. תהא $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונקציה . $x_0\in\mathbb{R}^n$

(א) נאמר שלפונקציה יש גבול l כאשר $x\to x_0$ אם

$$\forall\epsilon>0\,\exists\delta\;:\;0<|x-x_0|<\delta\;\Rightarrow\;|f(x)-l|<\epsilon$$

(ב) נאמר שהפונקציה רציפה ב x_0 אם

$$\forall\epsilon>0\,\exists\delta\;:\;\forall x\in B(x_0,\delta)\;:\;|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$$

משפט - הרכבה של פונקציות רציפות - רציפה.
למשל

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,2,3)}\frac{\sin(x(y^2+z^2))}{xy^2}=\frac{\sin(13)}{4}$$

תרגיל: (כלל הסנוויץ)
חשב את הגבול

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^5y^3}{x^4+y^6}$$

פתרון:

$$|\frac{x^5y^3}{x^4+y^6}|\le|\frac{x^5y^3}{x^4}|=|xy^3|\to 0$$

תרגיל (הצבה)

חשב את הגבול

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)^2}$$

פתרון:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)^2} = [t = x^2+y^2] = \lim_{t\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^{-2}}{e^{1/t}} =$$

$$= [\frac{\infty}{\infty}] = \lim_{t\to 0^+} \frac{-2t^{-3}}{-\frac{1}{t^2}e^{1/t}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{2t^{-1}}{e^{1/t}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{2}{e^{1/t}} = 0$$

תרגיל (קורדינאדות פולאריות)
חשב את הגבול

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |\frac{x^3+y^3}{2x^2+y^2}|$$

פתרון: נציב $x = r\cos(\theta),\ y = r\sin(\theta)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |\frac{x^3+y^3}{2x^2+y^2}| = \lim_{r\to 0} |\frac{r^3\cos^3(\theta)+r^3\sin^3(\theta)}{2r^2\cos^2(\theta)+r^2\sin^2(\theta)}| =$$

$$\lim_{r\to 0} |\frac{r[\cos^3(\theta)+\sin^3(\theta)]}{2\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)}| = \lim_{r\to 0} |\frac{r[\cos^3(\theta)+\sin^3(\theta)]}{\cos^2(\theta)+1}| \leq$$

$$\leq \lim_{r\to 0} |\frac{2r}{1}| = 0$$

הערה: אם קיים $\lim_{x\to a} f(x)$ כאשר $x \in A$ אזי הגבול הזה שווה גם ל $\lim_{x\to a} f(x)$ כאשר $x \in B \subset A$

דוגמא: הוכח כי לא קיים הגבול

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

פתרון: נסתכל על 2 מסלולים ונראה שמקבלים גבולות שונים

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

דוגמא: הוכח כי לא קיים הגבול

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

פתרון: נסתכל על 2 מסלולים ונראה שמקבלים גבולות שונים

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x=y}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{y^3}{y^2+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{1+y^2} = 0$$

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x=y^2}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{y^4}{y^4+y^4} = \frac{1}{2}$$

דיפרנציאביליות

נגזרות חלקיות

הגדרה : תהא $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ הנגזרת החלקית של f לפי המשתנה x_j ($1\le j\le n$) בנקודה a מוגדרת להיות

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) := \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te_j)-f(a)}{t}$$

כאשר e_j הוא הוקטור שיש לו 1 במקום ה j ואפסים בכל שאר המקומות $(0,0\ldots 0,1,0\ldots 0)$
הערה: מתקיים

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+te_j)-f(a)}{t} = \frac{d}{dx_j} f(a_1,a_2\ldots a_{j-1},x_j,a_{j+1},\ldots a_n)\Big|_{x_j=a_j}$$

כלומר להציב בכל המשתנים את הערך חוץ מהמשתנה x_j שגוזרים לפיו.
דוגמאות:

1. $f(x,y)=xy^2 \Leftarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y^2 \Leftarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)=4$
2. $f(x,y)=xy^2 \Leftarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2xy \Leftarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)=4$
3. $f(x,y)=e^{\cos(xy)} \Leftarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=e^{\cos(xy)}\cdot(-\sin(xy)\cdot x)$
4. $f(x,y)=\cos(\ln(x)\cdot e^{\arctan(x\cdot y)}) \Leftarrow$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,200) = \frac{d}{dy} f(1,y)\Big|_{y=200} = \frac{d}{dy}1\Big|_{y=200} = 0$$

הערה: סימון מקובל לנגזרת חלקית הוא $\frac{\partial f}{\partial x_j} = f'_{x_j}$

דיפרנציאביליות

תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה. ראינו כי מתקיים פיתוח טיילור

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+o(|x-a|),x\to a$$

אם נסמן/נבחר $x=a+h$ נקבל

$$f(a+h)-f(a)=f'(a)(h)+o(|h|),h\to 0$$

כלומר ככל שיותר מתקרבים ל a ההפרש הוא פונקציה לינארית ב h עם תוספת שהולכת ונהיית זניחה.
הגדרה (דיפרנציאביליות): תהא $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ נאמר ש f דיפרנציבילית בנקודה a אם קיים מטריצה $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ המקיימת

$$f(a+h)-f(a)=A(h)+o(|h|),h\to 0$$

סימונים: את ההעקתה הלינארית $h\to A(h)$ מסמנים df_a והיא נקראת הדיפרנציאל של f בנקודה a. A נקראת מטריצת יעקובי ומסומנת $J_f(a)$.
משפט (תנאי הכרחי לדיפ'): נסמן $f=(f_1,f_2,\dots f_m)$ אם f דיפרנציאבילית בנקודה a אזי

1. הפוקנציה f רציפה ב a
2. הנגזרות החלקיות $\{\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\}_{j=1,2,\dots n}$ קיימות
3.

$$A=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a)\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a)\end{pmatrix}$$

משפט (תנאי מספיק לדיפ'): אם קיים כדור פתוח $B(a,\delta)$ בו קיימות הנגזרות החלקיות $\{\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\}_{j=1,2,\dots n}$ והם רציפות בנקודה a אז f דיפרנציאבילית בנקודה a.
במקרה של $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ נקבל כי

$$A=\left(f'_x(a),f'_y(a)\right)$$

דוגמא: חשב את הדיפרנציאל של $f(x,y)=(xy,x-y,x+y)$ בנקודה $a=(3,2)$
פתרון: הנגזרות החלקיות קיימות ורציפות ולכן הפונקציה דיפר'. נחשב

$$f_1(x,y)=xy,f_2(x,y)=x-y,f_3(x,y)=x+y$$

ולכן

$$A = \begin{pmatrix} y & x \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\Bigg|_{(x,y)=a} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$df_a(h) = A \cdot h$$

תרגיל: האם

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & x = y = 0 \end{cases}$$

דיפרנציאבילית ב $a = (0,0)$?

פתרון: נבדוק תנאים הכרחיים:

1. רציפות: כיוון ש $0 \leq (x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$ נקבל כי $2xy \leq x^2 + y^2$ ולכן

$$|f(x,y)| = |\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}| \leq \frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}| = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} \to 0$$

כלומר f רציפה ב a

2. נגזרות חלקיות : $f'_x(0,0) = \frac{d}{dx}f(x,0) = 0, f'_y(0,0) = \frac{d}{dy}f(0,y) = 0$

3. מועמד לדיפרציאל הוא $df_a(h) = (0,0) \cdot h = 0$
לסיום צריך לבדוק האם

$$f(a+h) - f(a) - df_a(h) = o(|h|)$$

$$\iff \lim_{|h| \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - df_a(h)}{|h|} = 0$$

נחשב

$$\frac{f(a+h) - f(a) - df_a(h)}{|h|} = \frac{h_1h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \frac{h_1h_2}{h_1^2+h_2^2}$$

נראה כי

$$\lim_{|h| \to 0} \frac{h_1h_2}{h_1^2+h_2^2} \neq 0$$

ע"י 2 גבולות שונים

$$\lim_{\substack{h_1 \to 0 \\ h_2 = 0}} \frac{h_1h_2}{h_1^2+h_2^2} = 0$$

$$\lim_{\substack{h_1\to 0\\ h_2=h_2}} \frac{h_1h_2}{h_1^2+h_2^2} = \lim_{h_1\to 0} \frac{h_1^2}{h_1^2+h_1^2} = \frac{1}{2}$$

ולכן f אינה דיפר' ב a.

סימון: עבור $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ הדיפרנציאל df_a מסומן גם כ $\triangledown f(a)$ מפורשות

$$\triangledown f(a) = df_a = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$$