

אנליזה 1 למורים - פתרון תרגיל 9

שאלה 1

לאילו ערכי a, b הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x \geq 0 \\ x^2 + ax + b & x < 0 \end{cases}$$

גזירה לכל x ?

פתרון: בכל נקודה $x \neq 0$ הפונקציה גזירה (כפונקציה מעריכית או פולינום). באשר לנקודה $x = 0$, תחילה נבדוק לגבי רציפות (שהיא הכרחית עבור גזירות). רציפות מימין ב- $x = 0$ מובטחת, כיוון ש- $f(x) = e^x$ ב- $[0, \infty)$. באשר לגבול השמאלי:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + ax + b) = 0^2 + a \cdot 0 + b = b$$

(השוויון הלפני אחרון בגלל שהפולינום $x^2 + ax + b$ רציף ב- $x = 0$). לכן על מנת ש- $f(x)$ תהיה רציפה ב- $x = 0$ יש לדרוש $b = f(0) = e^0 = 1$, אז $b = 1$.

כעת נבדוק גזירות ב- $x = 0$:

בקרן $[0, \infty)$, $f(x) = e^x$, לכן הנגזרת החד-צדדית הימנית של $f(x)$ ב- $x = 0$ היא

$$f'_+(0) = (e^x)'(0) = e^0 = 1$$

בקרן $(-\infty, 0]$, $f(x) = x^2 + ax + 1$ (שימו לב שניתן לצרף את $x = 0$ בקצה הימני של הקרן כי בנקודה זו הפולינום אכן מקבל את הערך $f(0) = e^0 = 1$). לכן הנגזרת החד-צדדית הימנית של $f(x)$ ב- $x = 0$ היא

$$f'_-(0) = (x^2 + ax + 1)'(0) = 2 \cdot 0 + a = a$$

על מנת ש- $f(x)$ תהיה גזירה ב- $x = 0$ הכרחי ומספיק שהנגזרות החד-צדדיות שם יהיו שוות, אז $a = 1$.

שאלה 2

הוכיחו שלמשוואה $2x = \cos x$ יש פתרון ממשי יחיד.

הוכחה: הפונקציה $f(x) = 2x - \cos x$ גזירה בכל \mathbb{R} ומקימת $f(0) = -1 < 0$, $f(\pi) = 2\pi + 1 > 0$, לכן ממשפט ערך הביניים יש $x_0 \in (0, \pi)$ כך ש- $f(x_0) = 0$, כלומר $2x_0 = \cos x_0$, ולמשוואה קיים פתרון נוכיח שהפתרון יחיד: נניח בשלילה שהפתרון אינו יחיד. אז יש פתרון נוסף x_1 , $f(x_0) = f(x_1) = 0$, ממשפט רול נובע שקיימת נקודה c בין x_0 ל- x_1 שבה $f'(c) = 0$. אבל $f'(x) = 2 + \sin(x) \geq 2 - 1 > 0$ ולכן לא ייתכן שהנגזרת מתאפסת, סתירה.

שאלה 3

$$\frac{b-a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b-a}{a} \quad 0 < a < b \text{ מתקיים}$$

הוכחה:

נניח $0 < a < b$ כלשהם. הפונקציה $f(x) = \ln x$ גזירה בקטע $[a, b]$, לכן ממשפט הערך הממוצע של לגרנז' קיימת נקודה $c \in (a, b)$ כך ש- $f'(c) = \frac{1}{c}$. נשים לב:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\ln(b) - \ln(a)}{b - a} = \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{b - a}$$

וכיון ש- $a < c < b$, מתקיים $\frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$. ביחד נקבל בטה"כ

$$\frac{1}{b} < \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{b-a} < \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{b-a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b-a}{a}$$

שאלה 4

א. מצאו את הערך המקסימלי של הפונקציה $\frac{2x}{1+x^2}$ בציר הממשיים.

ב. הוכיחו כי לכל $x > 0$ מתקיים $0 < \ln(1+x^2) \leq x$.

פתרון

א. נגזור את הפונקציה ונמצא נקודות קיצון.

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2} \quad \text{נסמן:}$$

$$f'(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = 0$$

$$0 = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$0 = 2 - 2x^2$$

$$x = 1, x = -1$$

נבדוק את ערך הפונקציה בנקודות אלה והפונקציה עם הערך הגדול יותר הוא יהיה הערך המקסימלי

$$f(1) = \frac{2}{1+1} = 1$$

$$f(-1) = \frac{-2}{1+1} = -1$$

ולכן 1 הוא הערך המקסימלי של הפונקציה.

ב. נגדיר $f(x) = \ln(1+x^2)$.

תהי $0 < x$. אזי מתקיים שהפונקציה רציפה בקטע $[0, x]$ והיא גזירה בקטע $(0, x)$ ולכן לפי משפט

הממוצע של לגרנז' קיימת נקודה $0 < c < x$ כך שמתקיים:

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\ln(1+x^2)}{x}$$

מצד שני, מתקיים:

$$f'(c) = \frac{2c}{2+c^2}$$

נסמן ב-g את פונקציית הנגזרת של f.

בסעיף הקודם ראינו כי הערך המקסימלי של g הוא 1 ולכן מתקיים:

$$f'(c) = \frac{2c}{2+c^2} \leq 1$$

כלומר בעצם מתקיים:

$$\frac{\ln(1+x^2)}{x} \leq 1$$

כלומר:

$$\ln(1+x^2) \leq x$$

ומתקיים ש: $0 < \ln(1+x^2)$ לפי הגדרת פונקציית הln.

ולכן סך הכל קיבלנו:

$$0 < \ln(1+x^2) \leq x$$