

31.01.19

88-112 אלגברה לינארית 1 – מועד א'

מרצה: ארז שיינר

מתרגלת: אמונה ליפסקר

אורך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.

הוראות:

- יש לענות על כל 5 השאלות. סה"כ הניקוד המקסימלי 110 נק' (כל ציון מעל 100 יעוגל ל100).
- יש לענות על דפי הבחינה בלבד. ניתן להשתמש במחברת כטיוטה, אך המחברת לא תיבדק כלל.

חלק א'

1. (30 נק') יהי  $V$  מרחב וקטורי נוצר סופית, תהיינה  $T, S: V \rightarrow V$  העתקות לינאריות

(אופרטורים), נסמן את העתקת הזהות ב  $I: V \rightarrow V$ .

א. הוכיחו/הפריכו: אם  $T^2 + T = S$  ו  $T$  הפיכה אזי  $S$  הפיכה.

ב. הוכיחו/הפריכו: אם  $T^2 + T = S$  ו  $S$  הפיכה אזי  $T$  הפיכה.

ג. הוכיחו/הפריכו: אם  $(T - S)^2 = 0$  וגם  $T$  הפיכה, אזי  $S$  הפיכה.

דף נוסף לשאלה מספר \_\_\_\_\_

2. (9 נק') תהי מטריצה  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

הוכיחו שקיימת מטריצה  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  כך ש  $BA = B^t$ , או תנו דוגמה למטריצה  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$

עבורה לא קיימת  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . כזו.

דף נוסף לשאלה מספר \_\_\_\_\_

חלק ב'

3. (30 נק') נגדיר  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

- א. מצאו בסיס ומימד ל  $C(A) \cap R(A)$ .
- ב. מצאו בסיס ומימד ל  $C(A) \cap N(A)$ .
- ג. מצאו בסיס למימד ל  $C(A) + N(A)$ .
- ד. מצאו את כל ערכי  $x$  עבורם מתקיים כי  $(1, x, x^2) \in C(A)$ .

דף נוסף לשאלה מספר \_\_\_\_\_

דף נוסף לשאלה מספר \_\_\_\_\_



4. (20 נק') תהי העתקה לינארית  $T: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$  ויהיו

$$B = \{1, 1+x, x+x^2\} \text{ בסיס ל } \mathbb{R}_2[x]$$

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ בסיס ל } \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ בנוסף נתונה המטריצה המייצגת}$$

א. מצאו בסיס ומימד ל  $\text{Im}(T)$ .

ב. מצאו בסיס ומימד ל  $\ker(T)$ .

ג. האם קיים בסיס  $D$  ל  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  עבורו  $[T]_D^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  הוכיחו קביעתכם.

ד. האם קיים בסיס  $F$  ל  $\mathbb{R}_2[x]$  עבורו  $[T]_C^F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  הוכיחו קביעתכם.

דף נוסף לשאלה מספר \_\_\_\_\_

5. (21 נק')

- א. מצאו מטריצה  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  המקיימת  $A^2 + I = 0$ .
- ב. מצאו מטריצה  $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$  המקיימת  $A^2 + I = 0$ .
- ג. מצאו מטריצה  $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  המקיימת  $AA^t = 0$  אבל  $A \neq 0$ .

דף נוסף לשאלה מספר \_\_\_\_\_

דף נוסף לשאלה מספר \_\_\_\_\_