בדידה (88195), סמסטר קיץ תשפ,מועד ב'

מרצים: מר אחיה בר-און, גברת תמר בר-און, מר בארי גרינפלד, מר אלעד עטייא, ד"ר ארז שיינר
מתרגלים: אחיה בר-און, תמר בר-און, אריאל ויצמן, יפעת חדד, עוזי חרוש, עומר נטר, גלעד פורת-קורן, הראל רוזנפלד, אושרית שטוסל.
אורך המבחן: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
הנחיות:

- יש לענות על **כל** 6 השאלות .
- סך הנקודות במבחן הוא 106. ציון מעל 100 יעוגל ל 100 (חלק א 70 נקודות וחלק ב 36 נקודות)
- נמקו תשובתכם היכן שנדרש.

חלק א

1. נתונה הפונקציה $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ ע"י $f(x)=x^2-4x+3$ ונתונה הקבוצה $A=\{2,3\}$
   (א) מצאו קבוצה סופית B עבורה $f[A\triangle B]\neq f[A]\triangle f[B]$. אם אין קבוצה כזאת - הוכיחו זאת.
   (ב) מצאו קבוצה סופית B עבורה $f[A\cap B]\neq f[A]\cap f[B]$. אם אין קבוצה כזאת - הוכיחו זאת.
   (ג) מצאו קבוצה סופית B עבורה $f[A\backslash B]\neq f[A]\backslash f[B]$. אם אין קבוצה כזאת - הוכיחו זאת.
2. נגדיר $A=\{0,1,2\}\times\mathbb{N}$ ויהא S יחס על A. נגדיר יחס T על A ע"י הכלל
   $$(a,b)\,T\,(c,d)\iff((a=c)\wedge(b<d))$$
   ונגדיר את היחס $R=T\cup S$. נתון כי R יחס סדר על A וגם ש $T\cap S=\emptyset$. עוד נתון ש $(1,8)\,S\,(2,6)$ ו $(0,9)\,S\,(1,8)$.
   (א) חשבו את העוצמה המינימאלית האפשרית של הקבוצה
   $$\{((a,b),(c,d))\in S\mid d=9\}$$
   (ב) האם ייתכן כי S יחס טרנזיטיבי?
   (ג) נסמן ב C את קבוצת חסמי המלרע (לפי R) של תת הקבוצה
   $$\{(1,y)\mid y\geq 8\}$$
   (תת קבוצה של A). מצאו את העוצמה האפשרית המינימאלית של C. אם העוצמה אינסופית, הוכיחו זאת.
   (ד) מצאו את העוצמה האפשרית המקסמאלית של C מסעיף קודם. אם העוצמה אינסופית, הוכיחו זאת.
3. לכל n טבעי נגדיר את הקבוצה $A_n=\{n\cdot k\mid k\in\mathbb{N}\}$
   (א) כתבו את האיברים שבקבוצה $\{t\in\mathbb{N}\mid A_4\cup A_{21}\subseteq A_t\}$.
   (ב) לכל n טבעי נגדיר בנוסף את הקבוצות $B_n=A_{11n}\cap A_{12n}$. כתבו את האיברים שבקבוצה
   $$\{x\in\cup_{n=2}^{\infty}B_n\mid 1320<x<1980\}$$

(ג) נסמן ב $\mathbb{P}$ את קבוצת כל המספרים הראשוניים הטבעיים (הערה: המספר 1 אינו ראשוני). מצאו איבר השייך לקבוצה

$$\cup_{p\in\mathbb{P}}B_p \cap \left(\cap_{n\in\mathbb{N}}\left(\mathbb{N}\backslash B_{3^n}\right)\right)$$

כאשר B_n הן הקבוצות שהוגדרו בסעיף הקודם.

4. יהיו $c_x, c_y \in \mathbb{R}$. נגדיר יחס שקילות R על $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ע"י הכלל

$$(a,b)\,R\,(c,d) \iff \max\left\{|a-c_x|\,,|b-c_y|\right\} = \max\left\{|c-c_x|\,,|d-c_y|\right\}$$

ונתון כי

$$(7,-4)\,R\,(-5,-6)$$
$$(5,-4)\notin[(-5,-6)]_R$$
$$(-1,-6)\notin[(7,-4)]_R$$

(א) מצאו את c_x אם זה אפשרי. אם זה לא אפשרי - הוכיחו זאת.

(ב) נתון בנוסף כי לכל $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ קיים $(c,d)\in[(a,b)]_R$ כך ש $c-d=6$. מצאו את c_y אם זה אפשרי. אם זה לא אפשרי - הוכיחו זאת.

חלק ב

5. נחזור ליחס R מהשאלה הרביעית.

(א) הוכיחו כי R יחס שקילות.

(ב) לכל $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, מצאו את עוצמת מחלקת השקילות $\left|[(a,b)]_R\right|$ (חלקו למקרים).

(ג) מצאו את עוצמת קבוצת המנה $\left|{}^{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}/_{R}\right|$

6. נגדיר יחס R על $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ע"י הכלל: $(f,g)\in R$ אמ"מ $f\circ g = g\circ f$.

(א) הוכיחו/הפריכו: R יחס שקילות.

(ב) הוכיחו/הפריכו: קיימת $f\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ כך ש

$$\left|\left\{g\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\mid (f,g)\in R\right\}\right| = \aleph_0$$

(ג) הוכיחו/הפריכו: קיימת תת קבוצה $A\subseteq\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ כך ש $|A|=\aleph$ וגם מתקיים: לכל $f,g\in A$ אם $(f,g)\in A$ אז $f=g$.

במידה ותבחרו להגיש את חלק ב לבדיקה, ייתכן שתוזמנו לשיחת זום קצרה על המבחן (כתבו במקרה זה "עניתי על חלק ב").

במידה ותבחרו לא להגיש את חלק ב לבדיקה, תקבלו עליה 14 נקודות אוטומטית. (כתבו במקרה זה "לא עניתי על חלק ב").