לינארית 1 (88112), סמטסטר קיץ תשפ,מועד א'

מרצים: מר אחיה בר-און, מר בארי גרינפלד, ד"ר אליהו מצרי, מר אלעד עטייא, ד"ר ארז שיינר
מתרגלים: ניקול בלשוב, אחיה בר-און, תמר בר-און, אריאל ויצמן, יפעת חדד, נועה כהן, גלעד פורת-קורן, זהבה צבי, אושרית שטוסל.
אורך המבחן: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
הנחיות:

- יש לענות על **כל** 6 השאלות .
- סך הנקודות במבחן הוא 106. ציון מעל 100 יעוגל ל 100 (חלק א 70 נקודות וחלק ב 36 נקודות)
- נמקו תשובתכם היכן שנדרש.

חלק א

1. תהא $M = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ונגדיר $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ המוגדרת ע"י הכלל $T(A) = M \cdot A$. נגדיר בנוסף

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

שני בסיסים של $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(א) חשבו את $\text{trace}([T]_S^B)$

(ב) מצאו מטריצה A כך ש

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A \right\}$$

הוא בסיס של $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ומתקיים כי $\det[T]_C^B = 5$.

2. תהא $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. נסמן את מרחב העמודות של A ב $C(A)$ ונסמן את מרחב השורות של A ב $R(A)$ ונחשוב על שניהם כתתי מרחבים של $\mathbb{R}^3$.

(א) מצאו בסיס ל $C(A)$

(ב) מצאו בסיס ל $R(A)$

(ג) מצאו בסיס לסכום $C(A) + R(A)$

(ד) מצאו בסיס לחיתוך $C(A) \cap R(A)$

3. תהא

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a-2 & 0 \\ -3 & a+10 & 2a^2-2a+7 \\ 0 & 0 & 2a^2-2a-4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

התלויה בפרמטר a הממשי ותהא

$$B = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 1 \\ 19 & -8 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

מטריצה הפיכה ויהא

$$b = \begin{pmatrix} a \\ 3a+2 \\ 2a-4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$$

וקטור עמודה.

(א) מצאו את ההופכית של B(כלומר מצאו את B^{-1})

(ב) מצאו לאילו ערכי a למערכת $Ax=b$ אין פתרון יחיד (כלומר יש אינסוף פתרונות או שאין פתרון כלל).

(ג) מצאו לאילו ערכי a למערכת $AB^tx=b$ אין פתרון.

(ד) מצאו לאילו ערכי a למערכת $AB^tx=b$ יש אינסוף פתרונות.

(ה) בחרו ערך אחד של הפרמטר a עבורו למערכת $AB^tx=b$ יש פתרון יחיד.

(ו) עבור הערך שבחרתם בסעיף הקודם - מצאו את הפתרון של המערכת $AB^tx=b$

4. יהא $V=\mathbb{R}_2[x]$ מרחב הפולינומים הממשיים עד דרגה 2. תהא $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_2[x]$, המוגדרת ע"י משפט ההגדרה, להיות העתקה היחידה המקיימת כי

$$T(4+3x+10x^2) = 0+0x+0x^2$$
$$T(x) = 12-3x+10x^2$$
$$T(x^2) = 8-3x+5x^2$$

מצאו בסיס B של $\mathbb{R}_2[x]$ עבורו במטריצה המייצגת $[T]_B^B$ השורה השלישית היא שורת אפסים <u>וגם</u> העמודה הראשונה היא עמודת אפסים.

חלק ב

5. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ ונניח כי $m\geq 2$ טבעי מקיים כי $A^m=0$ וגם $A^{m-1}\neq 0$

(א) הוכיחו/הפריכו: קיים $v\in\mathbb{F}^n$ כך ש $v, Av, \ldots, A^{m-1}v$ בת"ל

(ב) הוכיחו/הפריכו: $A^n=0$ (שימו לב ש n הוא גודל המטריצה)

(ג) הוכיחו/הפריכו: $\text{rank}A\leq\frac{n}{2}$ (שימו לב ש n הוא גודל המטריצה)

6. יהא V מ"ו ויהיו $v_1,\ldots,v_n\in V$ בת"ל נסמן Q את קבוצת כל הוקטורים $v\in V$ המקיימים כי $v_1+v,\ldots,v_n+v$ ת"ל.

(א) הוכיחו/הפריכו: Q הוא תת מרחב של V.

(ב) הוכיחו /הפריכו: מתקיים כי $Q\subseteq\text{span}\{v_1,\ldots,v_n\}$

(ג) הוכיחו/הפריכו: מתקיים כי $Q=\{\sum_{i=1}^n\alpha_iv_i \mid \sum_{i=1}^n\alpha_i=-1\}$

במידה ותבחרו להגיש את חלק ב לבדיקה, ייתכן שתוזמנו לשיחת זום קצרה על המבחן (כתבו במקרה זה "עניתי על חלק ב").

במידה ותבחרו לא להגיש את חלק ב לבדיקה, תקבלו עליה 14 נקודות אוטומטית. (כתבו במקרה זה "לא עניתי על חלק ב").