בס״ד
מועד א׳ הנדסה - אלגברה לינארית חורף תשע״ג

1. מצאו מטריצה $A\in\mathbb{R}^{3\times3}$ סימטרית בעלת פולינום אופייני $f(x)=x^2(x-3)$ כאשר לערך העצמי $x=3$ יש וקטור עצמי $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

מצא $P\in\mathbb{R}^{3\times3}$ הפיכה ו $D\in\mathbb{R}^{3\times3}$ אלכסונית כך ש $P^{-1}AP=D$.

פתרון:

A סימטרית ולכן ניתנת ללכסון אורתוגונלי.

כל שני וקטורים שמאונכים לוקטור הנתון $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ יהיו מתאימים. לכן נמצא וקטורים שמאונכים אליו:

$$\left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right\rangle=0 \Longrightarrow x-y+z=0$$
$$z=y-x$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \leftarrow y=0,\ x=1$$
$$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \leftarrow y=1,\ x=0$$

הם אינם מאונכים זל״ז לכן נפעיל ג״ש ונקבל:

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$
$$v_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2\\1\\1/2\end{pmatrix}$$

בסה״כ קיבלנו 3 וקטורים מאונכים: כלומר קבוצה אורתוגונלית

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2\\1\\1/2\end{pmatrix}\right\}$$

ננרמל אותם לקבוצה אורתונורמלית:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}}_{\text{ו״ע של } x=3}\ \underbrace{\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1/2}{\sqrt{1\frac{1}{2}}}\\1/\sqrt{1\frac{1}{2}}\\\frac{1/2}{\sqrt{1\frac{1}{2}}}\end{pmatrix}}_{\text{ו״ע של } x=0}$$

נגדיר מטריצה $P=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & \frac{1/2}{\sqrt{1\frac{1}{2}}}\\-1/\sqrt{3} & 0 & 1/\sqrt{1\frac{1}{2}}\\ \dots\end{pmatrix}$ מטריצה אורתוגונלית ולכן:

$PDP^t \xleftarrow{\text{נגדיר}} D=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\ \dots\end{pmatrix}$

.2

א. יהיו V,W מרחבים וקטוריים מעל שדה F ותהי $T:V\to W$ העתקה לינארית חח"ע.
הוכח שהווקטורים $T\left(\vec{v_1}\right),...,T\left(\vec{v_n}\right)\in W$ בת"ל אם ורק אם $\vec{v_1},...,\vec{v_n}\in V$ בת"ל.

ב. מצא הע"ל **חד חד ערכית** $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ כך ש $T\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$ והוכיחו שהיא אכן כזו.

(א) נניח ש $\vec{v_1},...,\vec{v_n}$ בת"ל. צ"ל $\{T(v_1),...,T(v_n)\}$ בת"ל

נניח שיש צ"ל $\alpha_1 T(v_1)+...+\alpha_n T(v_n)=\vec{0}$

לפי $T(\alpha_1 v_1+...+\alpha_n v_n)=\vec{0}$

$\Rightarrow \alpha_1 v_1+...+\alpha_n v_n\in \ker T$

אבל נתון ש T חח"ע ולכן $\alpha_1 v_1+...+\alpha_n v_n=\vec{0}$

אז

$\ker T=\{\vec{0}\}$

אבל ידוע ש $v_1,...,v_n$ בת"ל $\Leftarrow$ $0=\alpha_1=...=\alpha_n$

נניח ש $T(v_1),...,T(v_n)$ בת"ל. צ"ל $\{v_1,...,v_n\}$ בת"ל

נניח שקיים צ"ל $\alpha_1\vec{v_1}+...+\alpha_n\vec{v_n}=\vec{0}$

נפעיל את T: $T(\alpha_1 v_1+...+\alpha_n v_n)=T(\vec{0})$

לפי תכונת הע"ל $\alpha_1 T(v_1)+...+\alpha_n T(v_n)=T(\vec{0})=\vec{0}$

אבל נתון ש $T(v_1),...,T(v_n)$ בת"ל ולכן $\alpha_1=...=\alpha_n=0$

(ב) לפי משפט ההגדרה לה"ל נגדיר

$T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

ונסביר למה ה"ל חח"ע:

$\mathrm{Im}\,T=sp\left\{\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}=\mathbb{R}^3$

לפי משפט המימדים לה"ל $\dim \mathrm{Im}\,T+\dim\ker T=3$

לכן היא חח"ע $\ldots = 3$

קסם

3. תהי $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצה אנטי סימטרית עם מקדמים ממשיים ויהיו λ,μ ע"ע שונים של A.

א. הוכח ש λ הוא מדומה טהור כלומר $\lambda=bi$ עבור $b\in\mathbb{R}$.

ב. הוכח שאם v,w הם וקטורים עצמיים של λ,μ בהתאמה אזי $\langle v,w\rangle=0$ ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית ב $\mathbb{C}^n$.

א) יהי $v\neq\vec{0}$ ו"ע ש $Av=\lambda v$. A ממשית

מצד אחד: $\langle Av,v\rangle=\langle\lambda v,v\rangle=\lambda\langle v,v\rangle$

מצד שני $\langle Av,v\rangle = (Av)^t\bar{v} = v^tA^t\bar{v} = -v^tA\bar{v} =$

אנטי סימטרית

$= -v^t\bar{A}\bar{v} = -\langle v,Av\rangle = -\langle v,\lambda v\rangle = -\bar{\lambda}\langle v,v\rangle$

לכן $\lambda=-\bar{\lambda} \Leftarrow \lambda$ מדומה טהור! $\left(\underline{\lambda+\bar{\lambda}=0}\right)$

ב) מצד אחד $\langle Av,w\rangle=(Av)^t\bar{w} = v^tA^t\bar{w} =$

$-v^tA\bar{w} = -v^t\bar{A}\bar{w} = -v^t(\overline{Aw}) = -\langle v,Aw\rangle$

$= -\langle v,\mu w\rangle = -\bar{\mu}\langle v,w\rangle = \mu\langle v,w\rangle$

סעיף א

מאידך $\langle Av,w\rangle=\langle\lambda v,w\rangle=\lambda\langle v,w\rangle$

$\mu\langle v,w\rangle=\lambda\langle v,w\rangle$

כיון ש $\mu\neq\lambda$

$\langle v,w\rangle=0$

4. יהי $F_4(t)$ מרחב הפולינומים ממעלה 4 ומטה במשתנה t מעל שדה F.

ויהי $W=\{f\in F_4(t) \mid f(1)=0\}$

א. מצא בסיס ל W.

ב. מצא תתי מרחבים V_1,V_2,V_3 שונים של W כך ש $V_1\subset V_2\subset V_3\subset W$.

(א) יהי $W \ni f(x)=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4$

$$f(1)=0 \Longrightarrow a+b\cdot 1+c\cdot 1^2+d\cdot 1^3+e\cdot 1^4=0$$

$$a+b+c+d+e=0$$

$$\Rightarrow e=-a-b-c-d$$

לכן כל פולינום ניתן לראותו כווקטור:

$$\begin{array}{c|c} 1 & \\ x & \\ x^2 & \\ x^3 & \\ x^4 & \end{array}\!\!\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ -a-b-c-d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= a(1-x^4)+b(x-x^4)+c(x^2-x^4)+d(x^3-x^4)$$

לכן הבסיס הוא: $\{1-x^4, x-x^4, x^2-x^4, x^3-x^4\}$

(ב) נגדיר

$$V_1=sp\{1-x^4\}$$

$$V_2=sp\{1-x^4, x-x^4\}$$

$$V_3=sp\{1-x^4, x-x^4, x^2-x^4\}$$

ולכן מתקיים: $V_1\subset V_2\subset V_3\subset W$

5.

א. יהיו $X,Y\in\mathbb{R}^{n\times n}$ כך ש X הפיכה. הוכח $rank(XY)=rank(Y)$.

ב. הוכח או הפרך: (כל המטריצות ממשיות והגודל שלהן מסומן כאינדקס)

i. אם $A_{4\times4}=B_{4\times3}C_{3\times4}$ אזי A אינה הפיכה.

ii. אם $D_{2\times2}=G_{2\times3}H_{3\times2}$ אזי D אינה הפיכה.

א. מהכיתה

ב. i הוכחה

$$rank\,A \le \left.\begin{matrix} rank\,B \\ rank\,C \end{matrix}\right\}$$

כי יש להן 3 שורות/3 עמודות

הדרגה המקסימלית של B,C היא 3 (מספיק של אחת מהן)

ולכן $rank\,A \le 3$

לפי משפט השקולים, A הפיכה $\Longleftrightarrow rank\,A=4$.

לכן A אינה הפיכה.

ii הפרכה!

נגדיר

$$G=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$H=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I$$

וכמובן ש I הפיכה.

20ק

6. יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ ($\langle *,* \rangle$ מכפלה פנימית כלשהי, לאו דווקא סטנדרטית)
ויהי $\{u_1,\dots,u_n\}$ בסיס אורתונורמלי של V. יהי $v\in V$.
א. הוכח ש $v=\langle v,u_1\rangle u_1+\cdots+\langle v,u_n\rangle u_n$.
ב. תהי θ_i הזווית שבין v ל u_i לכל $1\le i\le n$. הוכח ש $\cos^2\theta_1+\cdots+\cos^2\theta_n=1$.

א. V ממ"פ מעל $\mathbb{R}$, $\{u_1,\dots,u_n\}$ א"נ

לכן $i\neq j$ $\langle u_i,u_j\rangle=0$
$\langle u_i,u_i\rangle=1$

יהי $v\in V$
$v=\alpha_1u_1+\dots+\alpha_nu_n$

$\langle v,u_1\rangle=\langle\alpha_1u_1+\dots+\alpha_nu_n,u_1\rangle=$

$=\alpha_1\underbrace{\langle u_1,u_1\rangle}_{1}+\alpha_2\underbrace{\langle u_2,u_1\rangle}_{0}+\dots+\alpha_n\underbrace{\langle u_n,u_1\rangle}_{0}$

$\Rightarrow \alpha_1=\langle v,u_1\rangle$
באותו אופן $\alpha_i=\langle v,u_i\rangle$

ב. הנוסחה לזווית בין וקטורים $\cos(\theta_i)=\frac{\langle v,u_i\rangle}{\|v\|\cdot\underbrace{\|u_i\|}_{=1}}$ אורתונורמלי

$\Rightarrow \cos^2\theta_1+\dots+\cos^2\theta_n=\frac{\langle v,u_1\rangle^2}{\|v\|^2}+\dots+\frac{\langle v,u_n\rangle^2}{\|v\|^2}$

$=\frac{1}{\|v\|^2}\left(\langle v,u_1\rangle^2+\dots\langle v,u_n\rangle^2\right)=\frac{1}{\|v\|^2}\sum\langle v,u_i\rangle^2$

אבל אם נחשב את $\|v\|^2$ לפי סעיף א נקבל

$\|v\|^2=\langle v,v\rangle=\langle\sum\langle v,u_i\rangle u_i,\sum\langle v,u_i\rangle u_i\rangle=\dots\sum\langle v,u_i\rangle^2$