מקליד: עידן אריה
מרצה: פרופ' נתן נתניהו
תאריך: 2019-01-09

עיבוד תמונות
89-560-01

התמרת פוריה הדיסקרטית DFT

עבור חד־מימד:

$$F(u) \triangleq \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\, e^{-i\frac{2\pi}{N}ux}$$

וההתמרה ההופכית:

$$f(x) \triangleq \frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1} F(u)\, e^{i\frac{2\pi}{N}ux}$$

כאשר $f(x)$ נדגם ב־$x_0 + x\Delta x$ עבור $x = 0, 1, \ldots, N-1$.
כמו כן ניתן להראות כי הפונקציה הדיסקרטית $F(u)$ שווה לערכי הדגימה של F במקרה הרציף ב־$0, \Delta u, \ldots, (N-1)\Delta u$ כאשר $\Delta u = \frac{1}{N\Delta x}$

נשים ♡: בהתמרה דיסקרטית חשוב לשים לב ולציין איפה הדגימות ־ במקרה הזה ב־$x = 0, 1, \ldots N-1$.
גם בהתמרה ההופכית חשוב לשים לב ולציין איפה הדגימות ־ $0, \Delta u, \ldots, (N-1)$.

תכונות DFT

מחזוריות

צ"ל: $F(u+N) = F(u)$

הוכחה:

$$F(u+N) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\, e^{-i2\pi(u+N)\frac{x}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\, e^{-i2\pi u\frac{x}{N}} \cdot e^{-i2\pi N\frac{x}{N}} = \cdots$$

אבל נשים לב ש־$e^{-2\pi i} = 1$, ולכן $e^{-i2\pi N\frac{x}{N}} = e^{-\cancel{N}\frac{x}{\cancel{N}}} = e^{-x}$

הצגה של התמרת פוריה על תמונות

1. מזיזים בצורה ציקלית (זה בסדר כי ההתמרה היא מחזורית) את התמונה כך ש־$F(0,0)$ נמצאת באמצע.
2. עוברים לסולם לוגריתמי: $D(u,v) = \log(1 + |F(u,v)|)$.

הזזה של התמרת פוריה

טענה:

$$\mathrm{DFT}[f(x-x_0)] = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x-x_0) \cdot e^{-i2\pi x_0\frac{u}{N}} = \cdots$$

נגדיר $z = x - x_0$, ואז:

$$\cdots = \frac{1}{N}\sum_{z=-x_0}^{-x_0+N-1} f(z) \cdot e^{-i2\pi u\frac{z}{N}} \cdot e^{-i2\pi u\frac{x_0}{n}}$$

דגימת סיגנל ע"י סדרת פונקציות דלתא

רכבת הלמים/פוננצית הShah/פונקציית המסרק:

$$\mathrm{III}\left(x\right)=\mathrm{comb}\left(x\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(x-n\right)$$

טענה: $\mathcal{F}\left\{\mathrm{III}\left(x\right)\right\}=\mathrm{III}\left(u\right)$

$$\mathrm{III}\left(ax\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(ax-n\right)=\sum_{n=-\infty}$$

ועל סמך תכונות פונקציית הדלתא, $\delta\left(ax\right)=\frac{1}{|a|}\delta\left(x\right)$,

$$\mathrm{III}\left(ax\right)=\frac{1}{|a|}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(x-\frac{n}{a}\right)$$

ז"א - רכבת הלמים הנבדלים זה מזה ב$\frac{1}{a}$: $0,\frac{1}{a},\frac{2}{a},\frac{3}{a},\ldots$.
ועבור $a=\frac{1}{\tau}$:

$$\mathrm{III}\left(\frac{x}{\tau}\right)=\tau\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(x-\tau n\right)$$

לכן, עבור התמרת פוריה:

$$\mathcal{F}\left\{\mathrm{III}\left(ax\right)\right\}=\frac{1}{a}\mathcal{F}\left\{\mathrm{III}\left(\frac{u}{a}\right)\right\}\qquad\mathcal{F}\left\{\mathrm{III}\left(\frac{x}{\tau}\right)\right\}=\tau\mathcal{F}\left\{\mathrm{III}\left(\tau u\right)\right\}$$

ביטוי סיגנל הדגום בקצב של τ:

$$f_S\left(x\right)=f\left(x\right)\cdot\mathrm{III}\left(\frac{x}{\tau}\right)$$

התמרת פוריה של הסיגנל הדגום שווה, לפי משפט הקונבולוציה, לקונבולוציה הבאה:

$$\mathcal{F}\left\{f_S\left(x\right)\right\}=F\left(u\right)*\left(\tau\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\tau u-n\right)\right)=F\left(u\right)*\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(u-\frac{n}{\tau}\right)\right)=\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(u-\frac{n}{\tau}\right)\right)*F\left(u\right)$$

ואם נציב את הגדרת הקונבולוציה:

$$\mathcal{F}\left\{f_S\left(x\right)\right\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(u-\frac{n}{\tau}-p\right)F\left(p\right)\,\mathrm{d}p=\cdots$$

אבל לפי הגדרת פונציית הדלתא, $\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(u-\frac{n}{\tau}-p\right)F\left(p\right)\,\mathrm{d}p=F\left(p\right)$, ולכן:

$$\cdots=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F\left(u-\frac{n}{\tau}\right)$$

אנלוגיה לדו-מימד

במקום "רכבת למים" יהיה לנו "חוות למים"

משפט נייקוויסט

אם דוגמים כל a, קצב הדגימה הוא $\frac{1}{a}$. ואם גודל הגל שאנחנו רוצים לדגום הוא B, אז צריך $B < \frac{1}{a} - B$ כדי שהגלים לא יעלו אחד על השני - כלומר $2B < \frac{1}{a}$.

משפט נייקוויסט אומר שקצב הדגימה צריך להיות כפול מ"רוחב הסרט" - כלומר קצב הגל הנדגם.

מקליד: עידן אריה
מרצה: פרופ' נתן נתניהו
תאריך: 2019-01-09

עיבוד תמונות
89-560-01

התמרת פוריה המהירה

התמרת פוריה המהירה נותנת אותה תוצאה כמו התמרת פוריה רגילה - כל ההבדל הוא באופן החישוב.

ההגדרה להתמרת פוריה היא $F\left(u\right)=\frac{1}{N}\sum\limits_{x=0}^{N-1}f\left(x\right)e^{-i\frac{2\pi}{N}ux}$ עבור $u=0,1,\ldots N$. האלגוריתם הנאיבי ירוץ בסיבוכיות $O\left(n^{2}\right)$. ננסה לשפר את זמן הריצה באמצעות שיטת הפרד ומשול, כדי להפוך את זה ל$O\left(n\log n\right)$.

שיטת Cooley and Tukey