תרגיל בית 9 מבנים אלגבריים
89-214 סמסטר א' תש"ף

שאלה 1. (חימום.) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(1) כל תת-חבורה נורמלית היא אבלית

(2) הגרעין של כל הומומורפיזם $\phi\colon G \to H$ היא תת-חבורה נורמלית של G.

(3) אם חבורות המנה G/N ציקלית אזי G אבלית.

שאלה 2. ניזכר בהגדרה של מספר קרמייקל: מספר n הוא מספר קרמייקל אם ורק אם לכל $b \leq n$ הזר ל-n מתקיים: $b^{n-1} \equiv 1 \mod n$. השתמשו בפונקציה שמימשתם בשאלה 3 בתרגיל 8. והראו כי המספר 41041 הוא מספר קרמייקל, בנוסף ממשו את אלגוריתם מילר-רבין ומצאו לפחות 5 עדים לפריקותו של המספר הנ"ל. יש לצרף את קובץ קוד המקור שלכם.

שאלה 3. בסעיפים הבאים קבעו האם $H \triangleleft G$:

(1) $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}, G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : (a,b,c \in \mathbb{R}) \wedge (ac \neq 0) \right\}$

(2) $H = \{\alpha I \colon \alpha \in \mathbb{F}^*\}, G = \mathrm{GL_n}(\mathbb{F})$

שאלה 4. נתבונן בחבורה $G = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

(1) הוכיחו שהסדר של כל איבר ב-G הוא סופי, אבל ישנם איברים בחבורה מסדר גדול כרצוננו.

(2) יהיו $a, b \in G$ הראו שתת החבורה הקטנה ביותר של G שמכילה את a, b היא ציקלית וסופית.

(3) מצאו תת-חבורה אינסופית G מוכלת ממש ב-G.

שאלה 5. הוכיחו כי:

$$\mathbb{C}^*/\mathbb{T} \cong \mathbb{R}^+$$

כאשר, $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}^* \colon \mid z \mid = 1\}, \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \colon x > 0\}$ והפעולה היא פעולת הכפל.

שאלה 6. תהיינה $G_1, \cdots G_n$ חבורות, ותהיינה $H_1, \cdots H_n$ תתי-חבורות נורמליות שלהן בהתאמה (כלומר; $H_i \triangleleft G_i$ לכל $1 \leq i \leq n$).

(1) הוכיחו כי $H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n \triangleleft G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$.

(2) הוכיחו כי $G_1 \times \cdots \times G_n \big/ H_1 \times \cdots \times H_n \cong G_1/H_1 \times \cdots G_n/H_n$.