מופשטת 3 - הרצאה מס' 1.

The Trisectors

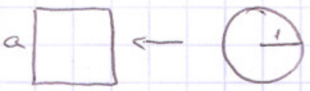
הבעיות של ימי קדם: (באמצעות מחוגה וסרגל)

1. להכפיל את הקוביה.

2. לשלש את הזווית.

אם α זווית אז לבנות זווית בגודל $\frac{\alpha}{3}$ $(\cos\frac{\alpha}{3})$

3. לרבע את המעגל. כלומר לבנות קטע באורך $\sqrt{\pi}$.



$\sqrt{\pi}$ (רק ב- 1882 הצליחו להוכיח שלא ניתן לפתור בעיה זו)

4. לבנות מצולע משוכלל. $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$.

5. להוכיח את אקסיומת המקבילים.

משוואות פולינומיאליות:

משוואות ריבועיות ידעו לפתור מזמן היוונים ואולי הבבלים: $ax^2+bx+c=0$

ב- 1515 הצליח דל פרו לפתור ~~משוואה~~ משוואות ממעלה שלישית, ושמר את זה בסוד. מאוחר 20 שנה אחר"כ הצליח גם Tartaglia לפתור משוואות ממעלה 3 וסיפר על זה רק ל- Cardano שהבטיח לשמור את זה בסוד אך לאחר שנה כבר הוציא ספר ופרסם באלגברה.

ב- 1545 פתרו משוואה ממעלה רביעית.

ב- 1831 - אמצע המהפכה הצרפתית, גלואה היה בן 20, הוא ניסה להתקבל לאקדמיה הצרפתית אך לא התקבל ולכן פנה לפוליטיקה והגיע לכלא, בסוף הוא הסתבך בדו-קרב והספיק לפני לכתוב את מה שידע.

גלואה בין השאר הוכיח שלא ניתן לפתור משוואות ממעלה חמישית.

גלואה ואבל פתחו את תורת השדות ותורת החבורות.

פתרון משוואה ממעלה שלישית:

נתונה המשוואה $ax^3+bx^2+cx+d=0$ (עם מקדמים מהשדה)

נחלק במקדם המוביל $\leftarrow a=1$

בס״ד

אז מציבים $x = y - \frac{b}{3a}$ מעלימה את המקדם של y^2.

עכשיו $x^3 - ax + b = 0$

נציב $x = \alpha + \beta$:

$$\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 = a\cancel{x} - b$$

$$\parallel$$

$$\alpha^3 + \beta^3 + 3\cancel{\alpha\beta}x$$

מחליטים ש- $\alpha\beta = a/3$

$$\downarrow$$

$$\alpha^3\beta^3 = \frac{a^3}{27}$$

α^3, β^3 פותרים את המשוואה $\underbrace{(z-\alpha^3)(z-\beta^3)}_{\parallel} = 0$

$$z^2 + bz + \frac{a^3}{27}$$

הוצאת $\sqrt{}$ + נותן את α^3, β^3, אחר מוציאים $\sqrt[3]{}$ ומקבלים את α, β.

S_3 $\sqrt{}\,,\ \sqrt[3]{}$

$1\ Z_2$ $2 \cdot 3 = 6$

A_3

$1\ Z_3$

1

פתרון משוואה ממעלה רביעית:

$$x^4 - ax^2 + bx - c = 0$$

$$\parallel \qquad \downarrow$$

משוואה כזו שמקבלים אחרי ההצבה הראשונה שעשינו.

$$\parallel$$

$$(x^2 - Ax + B)(x^2 + Ax + C)$$

$$\parallel$$

$$x^4 + (B + C - A^2)x^2 + A(B - C)x + BC$$

$$\begin{cases} B + C - A^2 = -a \\ A(B - C) = b \end{cases}$$

$$BC = -c$$

מתוך שתי המשוואות הראשונות ונניח שאנחנו יודעים את A:

$$\leftarrow \quad \begin{cases} B + C = A^2 - a \\ B - C = b/A \end{cases}$$

17/10/13

הרצאה י״ג חשון תשע״ד

$$B = \frac{A^2 - a + b/A}{2} \quad \leftarrow$$

$$C = \frac{A^2 - a - b/A}{2}$$

$$\Rightarrow -c = BC = \frac{1}{4}\left[(A^2 - a) - \left(\frac{b}{A}\right)^2\right]$$

$$A^4 - 2aA^2 + a^2 - \frac{b^2}{A^2} + 4c = 0$$

$$A^6 - 2aA^4 + (a^2 + 4c)A^2 - b^2 = 0$$

$$. A \Leftarrow A^2 \Leftarrow$$

$$\underbrace{\sqrt[3]{\ }\ \sqrt{\ }}_{\substack{\text{כמו לפתור} \\ \text{משוואה ממעלה 3}}}\ \ \underbrace{\sqrt{\ }}_{\substack{\text{כמו} \\ \text{למצוא} \\ \text{את } A}}\ \ \underbrace{\sqrt{\ }}_{\substack{\text{שורש} \\ \text{משוואה} \\ \text{ריבועית}}}$$

$$\underbrace{2 \cdot 3}_{} \cdot \underbrace{2}_{} \cdot \underbrace{2}_{} = \underset{|S_4|}{24}$$

$$\begin{array}{c} S_4 \\ \Big| \ 2 \\ A_4 \\ \Big| \ 3 \\ K \\ \Big| \ 2 \\ \mathbb{Z}_2 \\ \Big| \ 2 \\ 1 \end{array}$$

שדה = חוג קומוטטיבי שבו כל איבר $(\neq 0)$ הוא הפיך.

למשל: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$.

מוטו מהו שדה = מה, מאופיין ע״י אקס׳.

תת-שדה: $F \subseteq K$

= תת קבוצה המכילה $0,1$ וסגורה לחיבור, כפל, נגדי והופכי.

תחום שלמות $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}[x]$.

תחום ראשי: תחום שלמות שבו כל אידיאל הוא Ra

תחום אוקלידי $d: R \longrightarrow \mathbb{N}$

תזכורת

$$\forall a\ \forall b \neq 0\ \exists q:$$
$$d(a-qb)<d(b)$$

R חוג. $a|b$ אם $\exists c: b=ac$ –

הפיך: $u|1$.

a אי-פריק: $b|a \Rightarrow a|b$ או $b|1$.

שקול $\Uparrow$

a ראשוני: $a|bc \Rightarrow a|b$ או $a|c$.

F שדה.

$F[x]$ – חוג אוקלידי כאשר $\deg(f)=$ המעלה של f.

$I \triangleleft R$ $\quad R/I = \{x+I \mid x\in R\}$ – חוג המנה ביחס ל- I.

דוגמה: $R=F[x]$. נסמן $g\in R$. $I=Rg \triangleleft R$

$$g = x^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \quad , \quad I=Rg$$

טענה: לכל $f\in R$ יש f_0 ממעלה $<n$ (יחיד) כך ש-

$$f-f_0 \in I \ (g|f-f_0) \quad , \quad f+I=f_0+I$$

$$f\equiv f_0 \in R/I$$

הוכחה: נחלק עם שא' $f=q\cdot g+f_0$ כך ש- $\deg(f_0)<\deg(g)=n$

$$\Leftarrow \quad f+Rg=f_0+Rg$$

נניח יחידות: אם $f_0\equiv f_1 \pmod g$

$$\deg(f_0),\ \deg(f_1)<n$$

אז $\underset{\text{ממעלה } n}{g} \mid \underbrace{f_0-f_1}_{\text{ממעלה } < n}$

$$\Leftarrow \quad f_0=f_1.$$

$F[x] = \mathrm{span}\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ –אינ'

המסקנה:
$$F[x]/F[x]g = \mathrm{span}\{\underbrace{1, x, \dots, x^{n-1}}_{\text{וזה בסיס}}\}$$

$$x^n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \pmod g$$

$$\dim\left(F[x]/F[x]g\right)=\deg(g)$$

17/10/13 מבא יג׳ [illegible]

<u>מסקנות:</u>

1. נניח ש- $M \triangleleft R$ אידאל מקסימלי, R קומוטטיבי. אז $R/_M$ שדה.
2. נניח ש- R תחום ראשי.

   אז $\underset{\neq 0}{a\in R}$ אי-פריק,

   $Ra \triangleleft R$ מקסימלי ולכן $R/_{Ra}$ שדה.
3. מסקנה, אם $g\in F[x]$ אי-פריק אז $F[x]/_{F[x]g}$ הוא שדה.

נזכיר האיזומורפיזם השני:

R חוג, $S\subseteq R$ תת-חוג, $I\triangleleft R$.

$$S+I/_I \cong S/_{S\cap I}$$

$$\begin{tikzcd} & S+I \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ S \arrow[dr, dash] & & I \arrow[dl, dash] \\ & S\cap I & \end{tikzcd}$$

$$R=F[x]$$

$$S\cap I=0 \Leftarrow \begin{cases} S=F \\ I=Rg \end{cases}$$

$$F\cong F/_0 = F/_{F\cap I}\cong F+I/_I \subseteq R/_I$$