בס"ד

אוניברסיטת בר-אילן
מבחן בקורס תורת החבורות (סמסטר קיץ)
מרצה: פרופ' מיכאל מגרל
תאריך: 16.11.03 מועד א'
חומר עזר: רק מחשבון
משך המבחן: שעתיים

**השאלות:**

**5 מתוך 7**

1. ענה כן או לא:
א. קיימת תת חבורה עם 45 איברים בחבורה סימטרית $S_{15}$.
ב. במסלול הצמדה $[\beta]=\{g\beta g^{-1}\ :\ \ g\in S_4\}$ של $\beta=(1,4,2)$ יש 10 איברים.
ג. נתונה התמורה $\alpha=(10,3)(4,15)(2,7,12)$. הסדר של התמורה $\alpha^{14}$ שווה ל 6.
ד. קיים אפימורפיזם $C_{35}\times C_8\to C_{16}$.
ה. אם $H$ תת חבורה נורמלית של $Y$ ו $Y$ תת חבורה נורמלית של $G$ אז $H$ תת חבורה נורמלית של $G$.
ו. יש לפחות 4 חבורות לא איזומורפיות עם 8 איברים.

2. נתונה חבורה $G=<cis(\pi\sqrt{2})>$. כמה איברים $a\in G$ מקיימים $G=<a>$ ?
תאר: תת חבורות ואטומורפיזמים (ז"א איזומורפיזמים $f:G\to G$ ) של $G$.

3. א. לנסח משפט Euler.
ב. באמצעות משפט Euler מצא 2 ספרות אחרונות של המספר $8073767^{1999}+2003$.

4. נגדיר $rank(G):=\min\{r\in N\mid\ \ G=<g_1,g_2,\cdots,g_r>\}$
(מספר מינימלי של איברים בקבוצת יוצרים).
א. תן דוגמא של חבורה $G$ כך ש: $rank(G)=1,\quad rank(G)=2,\quad rank(G)=3$.
ב. הוכח שלכל חבורה סופית $X$ קיימת חבורה $G$ עם $rank(G)=2$ כך ש $X$ איזומורפית עם תת חבורה מסוימת של $G$.
ג. הוכח שכל חבורה קומוטטיבית $G$ עם $rank(G)=2$ איזומורפית לחבורת מנה של החבורה $Z^2=Z\times Z$.

5. א. הוכח משפט האיזומורפיזם הראשון.
ב. הוכח: $R^2/Z^2\cong T^2$ (כאשר $T:=\{z\in C\mid\ \ \|z\|=1\}$).

6. א. הוכח משפט Burnside על חישוב של מספר מסלולים.
ב. כמה לוחות $4\times 4$ לא שקולים (עד כדי סיבובים) קיימים אם מותר להשתמש ב 3 צבעים נתונים (לפרט: מה הוא מרחב הפעולה).

7. א. הגדר חבורה פתירה ותן דוגמא (רק נימוק מינימלי) של חבורה לא פתירה.
ב. לנסח משפטי Sylow.
ג. הוכח שאם $G$ חבורה בעלת $pq$ איברים (כאשר $p,q$ ראשוניים) אז $G$ פתירה.

בהצלחה !