$$\tan\gamma = \tan\frac{\Theta}{2}$$

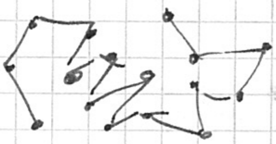
$$\gamma = \frac{\Theta}{2}$$

$$\boxed{\sigma'(\gamma) = 4\cos\gamma\,\sigma(2\gamma)}$$

$$\sigma'(\gamma) = \cos\gamma\cdot\left(\frac{\alpha}{2E}\right)^2\cdot\frac{1}{\sin^4\gamma}$$

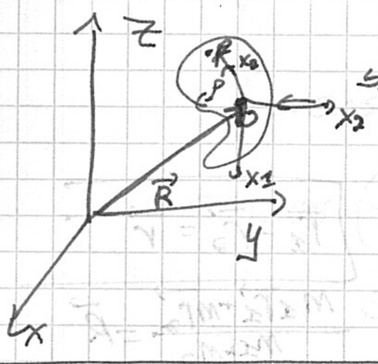
בהנחה ש $u_{(r)} = \frac{\alpha}{r}$

גוף קשיח



המרחקים נשמרים

קבועים [הגדרה של גוף קשיח]

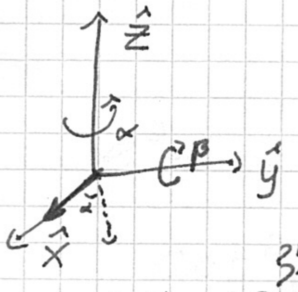


שהמרחקים לא משתנים האנרגיה קבועה. ולכן זה לא משנה באותן משוואות אוילר לגרנז'.

זקוקים ל-6 קואורדינטות

הרצאה 12

$$\vec r = r\hat x$$



סיבוב סביב ציר z עם זוית α

$$\vec r_\alpha = r\cos\alpha\,\hat x + r\sin\alpha\,\hat y$$

$$\vec r_{\alpha\beta} = r\cos\alpha(\cos\beta\,\hat x - \sin\beta\,\hat z) + r\sin\alpha\,\hat y$$

$$\vec r_{\alpha\beta} = r\cos\alpha\cos\beta\,\hat x + r\sin\alpha\,\hat y - r\cos\alpha\sin\beta\,\hat z$$

$$\vec r_\beta = r\cos\beta\,\hat x - r\sin\beta\,\hat z$$

$$\vec r_{\beta\alpha} = r\cos\beta(\cos\alpha\,\hat x + \sin\alpha\,\hat y) - r\sin\beta\,\hat z$$

$$\vec r_{\beta\alpha} = r\cos\alpha\cos\beta\,\hat x + r\sin\alpha\cos\beta\,\hat y - r\sin\beta\,\hat z$$

$$r_{\beta\alpha} \neq r_{\alpha\beta}$$

ניקח זוויות קטנות:

$$\vec r_{\alpha\beta} = r\hat x + r\Delta\alpha\,\hat y - r\Delta\beta\,\hat z$$

$\alpha \ll 1$, $\beta \ll 1$

$$\vec r_{\beta\alpha} = r\hat x + r\Delta\alpha\,\hat y - r\Delta\beta\,\hat z$$

ניצג כווקטור

$$\Delta\Theta = \Delta\beta\,\hat y + \Delta\alpha\,\hat z$$

$$\Delta\vec r = \vec r_{\alpha\beta} - \vec r = r\Delta\alpha\,\hat y - r\Delta\beta\,\hat z$$

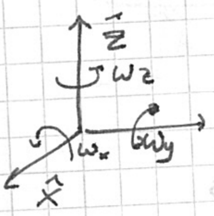
$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{\Theta}\times\vec{r}$ רק לסיבובים קטנים.

$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dot{\vec{r}}$ ← השינוי עקב סיבוב

אין יש קומוטציות בסיבובים

$= \frac{\Delta\vec{\Theta}}{\Delta t}\times\vec{r} = \dot{\vec{\Theta}}\times\vec{r}$

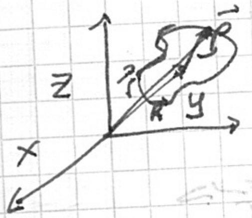
יש -- במהירות סיבוב



$\vec{\omega} = \omega\hat{z}$

$\vec{\Omega} = \Omega_x\hat{x} + \Omega_y\hat{y} + \Omega_z\hat{z}$

מהירות סיבובית.

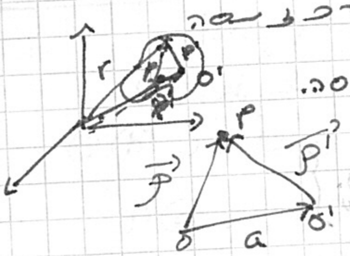


לא ישתנה כלל שהוא - $\|\vec{\rho}\|$ גוף קשיח.

$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{\rho}})$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{V} + \vec{\Omega}\times\vec{\rho}}$$

מהירות מרכז מסה — מהשמה סיבובים.



נבחר נקודה O' שהיא לא נקודת מרכז המסה.

$\vec{v} = \vec{V} + \vec{\Omega}\times(\vec{a} + \vec{\rho}')$

$\vec{v} = \vec{V} + \vec{\Omega}\times\vec{a} + \vec{\Omega}\times\vec{\rho}'$

מצד שני

$\vec{v} = \vec{V}' + \vec{\Omega}'\times\vec{\rho}'$

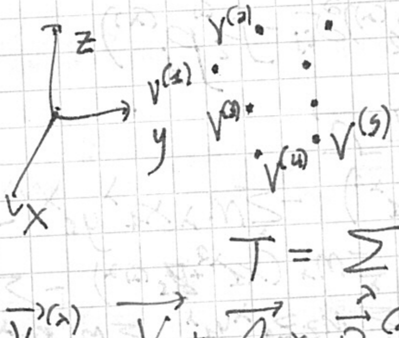
$[\vec{V} + \vec{\Omega}\times\vec{a} - \vec{V}'] + [\vec{\Omega} - \vec{\Omega}']\times\vec{\rho}' = 0$

בגלל ש $\vec{\rho}'$ שרירותי אז חייבים להתקיים שני משוואות

I) $\vec{V} + \vec{\Omega}\times\vec{a} = \vec{V}'$

II) $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}'$

$\vec{v} = \vec{V} + \vec{\Omega}\times\vec{\rho}$



$T = \sum \frac{1}{2} m_a (v^{(a)})^2$

$\vec{v}^{(a)} = \vec{V} + \vec{\Omega}\times\vec{\rho}^{(a)}$

$T = \frac{1}{2}\sum_a m_a [\vec{V} + \vec{\Omega}\times\vec{\rho}^{(a)}]^2$

$\sum m_a = m$

$$T=\sum_\lambda \frac{m_\lambda}{2}V^2+\sum_\lambda m_\lambda \vec V\cdot(\vec\Omega\times\vec\rho^{(\lambda)})+\sum_\lambda \frac12 m_\lambda(\vec\Omega\times\vec\rho^{(\lambda)})^2$$

$$\sum_\lambda m_\lambda \vec V\cdot(\vec\Omega\times\vec\rho^{(\lambda)})=\sum_\lambda m_\lambda(\vec V\times\vec\Omega)\cdot\vec\rho^{(\lambda)}$$

$$=(\vec V\times\vec\Omega)\underbrace{\sum_\lambda m_\lambda\vec\rho^{\lambda}}=(\vec V\times\vec\Omega)\cdot\vec 0=0$$

שמרכז המסה בראשית הצירים
כי זה 0.

$$T=\frac12 MV^2+\sum_\lambda \frac12 m_\lambda\left[\vec\Omega\times\vec\rho^{(\lambda)}\right]^2$$

$$(\vec A\times\vec B)^2=A^2B^2-(\vec A\cdot\vec B)^2 \longleftarrow$$ זהות

$$T=\frac12 MV^2+\boxed{\frac12\sum_\lambda m_\lambda\left(\Omega^2\rho^2-(\vec\Omega\cdot\vec\rho)^2\right)} \quad (*)$$

$$(\rho^\lambda)^2=\rho_1^{(\lambda)2}+\rho_2^{(\lambda)2}+\rho_3^{(\lambda)2}$$

במערכת הצירים
של $\{x_1,x_2,x_3\}$

$$\Omega^2\cdot\rho^{(\lambda)2}=\sum_{i=1}^3\Omega_i^2\cdot\sum_{j=1}^3\rho_j^{(\lambda)2}$$

$$(\Omega\cdot\rho^{(\lambda)})^2=\left(\sum_{i=1}^3\Omega_i\rho_i^{(\lambda)}\right)\left(\sum_{j=1}^3\Omega_j\rho_j^{(\lambda)}\right)$$

$$(*)=\frac12\sum_\lambda m_\lambda\left\{\sum_i\sum_j\Omega_i^2\rho_j^{(\lambda)2}-\sum_i\Omega_i\rho_i\sum_j\Omega_j\rho_j\right\}$$

$$=\frac12\sum_\lambda m_\lambda\sum_{i=1}^3\sum_{j=1}^3\left(\Omega_i^2\rho_j^{(\lambda)2}-\Omega_i\rho_i^{(\lambda)}\Omega_j\rho_j^{(\lambda)}\right)$$

$$=\sum_i\sum_j\sum_\lambda\frac12 m_\lambda\left(\Omega_i^2\rho_j^{(\lambda)2}-\Omega_i\rho_i^{(\lambda)}\Omega_j\rho_j^{(\lambda)}\right)$$

$$=\sum_i\sum_j\Omega_i\Omega_j\sum_\lambda\frac12 m_\lambda\left(\sum_{l=1}^3\rho_l^{(\lambda)2}\delta_{ij}-\rho_i^{(\lambda)}\rho_j^{(\lambda)}\right)$$

$$\rho_i^2\rho_j^2=\rho_i\rho_j\delta_{ij}$$

$$=\frac12\sum_i\sum_j\Omega_i\Omega_j\underbrace{\sum_\lambda m_\lambda\left(\sum_{l=1}^3\rho_l^{(\lambda)2}\delta_{ij}-\rho_i\rho_j^{(\lambda)}\right)}_{I_{ij}}$$

$$\delta_{ij}=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$$

דלתא של
קרונקר.

$$T=\frac12 MV^2+\frac12\sum_i\sum_j\Omega_i I_{ij}\Omega_j$$

$$I_{ij}=\sum_\lambda m_\lambda\left(\sum_{l=1}^3\rho_l^{(\lambda)2}\delta_{ij}-\rho_i^{(\lambda)}\rho_j^{(\lambda)}\right)$$

$$T=\frac12 MV^2+\frac12\vec\Omega I\vec\Omega$$

$$I=\begin{pmatrix}\sum m_\lambda(y_1^{\lambda2}+z_1^{\lambda2}) & -\sum_\lambda m_\lambda x_1^\lambda y_1^\lambda & -\sum m_\lambda x_1^\lambda z_1^\lambda\\ -\sum_\lambda m_\lambda x_1^\lambda y_1^\lambda & \sum_\lambda m_\lambda(x_1^{\lambda2}+z_1^{(\lambda)2}) & -\sum m_\lambda y_1 z_1\\ -\sum_\lambda m z_1^\lambda x_1^\lambda & -\sum_\lambda m z_1^\lambda y_1^\lambda & \sum m_\lambda(x_1^{\lambda2}+y_1^{\lambda2})\end{pmatrix}$$

$$\sum_i\sum_j\Omega_i^2\rho_j^{(\lambda)2}$$
$$=\sum_l\Omega_i^2\sum_j\rho_j^{(\lambda)2}$$
$$=\sum_i\sum_j\Omega_i\Omega_j\delta_{ij}\sum_l\rho_l^{(\lambda)}$$

אפשר לבחור 0 כך ש I תהיה אלכסונית [I היא סימטרית].

$$T=\frac12 MV^2+\frac12 I_{x_1}\Omega_{x_1}^2+\frac12 I_{y_1}\Omega_{y_1}^2+\frac12 I_{z_1}\Omega_{z_1}^2$$ ואז