

תרגול כיתה 8 – מבוא להסתברות וסטטיסטיקה  
משתנים מקריים דו-מימדיים רציפים, קונבולוציה  
 מתרגלים: ליאור דקל ואדם צ'פמן

**שאלה 1**

נתונה פונקציית הצפיפות המשותפת של  $X$  ו- $Y$ :

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-x}e^{-2y} & 0 < x < \infty, \quad 0 < y < \infty \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

חשב את ההסתברויות הבאות:

א.  $P(X > 1, Y < 1)$

ב.  $P(X < Y)$

ג.  $P(X < a)$  ( $a > 0$  – קבוע)

**שאלה 2**

שני חברים מחליטים להפגש. כל אחד מהם מגיע למקום שנקבע, באופן בלתי בתלוי באחר, בזמן המתפלג אחיד בין 14:00 ל- 15:00. מצא את ההסתברות שהמגיע ראשון ימתין למעלה מ- 10 דקות.

**שאלה 3**

פונקציית הצפיפות המשותפת של  $X, Y$  נתונה ע"י:

$$f(x, y) = \begin{cases} c(1-x-y) & 0 \leq x, 0 \leq y, x+y \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

מצא את:

א. הקבוע  $c$ .

ב.  $E(X), E(Y), V(X), V(Y)$

ג.  $E(X | Y = y)$

ד.  $\rho(X, Y)$

קונבולוציה

שימוש חשוב של קונבולוציה בהסתברות הוא חישוב סכום של מ"מ בלתי תלויים.

כאשר  $X, Y$  מ"מ ב"ת וסכומם  $Z = X + Y$ , אזי –

עבור משתנים בדידים:

$$P(Z = k) = P(X + Y = k) = \sum_i P(X = i, Y = k - i) = \sum_i P(X = i) P(Y = k - i)$$

עבור משתנים רציפים:

$$P(Z \leq k) = P(X + Y \leq k) \Rightarrow f_Z(k) = f_{X+Y}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(k - y) f_Y(y) dy$$

שאלה 4

יהיו  $X, Y$  מ"מ ב"ת כך ש-  $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$ ,  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ . מצא בעזרת קונבולוציה את התפלגות  $Z = X + Y$ .

שאלה 5

מטילים שתי קוביות הוגנות. מצא את פונקציית התפלגות סכום הערכים שהן מראות.

שאלה 6

יהיו  $X, Y$  מ"מ ב"ת כך ש-  $Y \sim \text{Bin}(m, p)$ ,  $X \sim \text{Bin}(n, p)$ . מצא בעזרת קונבולוציה את התפלגות  $Z = X + Y$ .