# פיסיקה למתמטיקאים 88-320
# מבחן מועד א' סמסטר ב' תשע"ב

משך המבחן: שלוש שעות. כל חומר עזר מותר בשימוש (כולל מחשבון).
ענו על 3 מ-4 השאלות הבאות. ניתן גם (לא חובה) לענות על שאלת הבונוס (שאלה 5). סמנו בבירור על איזו שאלה אתם עונים והקיפו תשובות סופיות.

1. שאלה מתרגילי הבית:

**The brachitostrone problem** בשאלה זו נוודא כי זמן הנסיעה מנקודה $(x_1, y_1)$ לנקודה $(x_2, y_2)$ לאורך ישר המחבר את שתי הנקודות, $t_{1,2}^{lin}$, ארוך מזמן הנסיעה בין שתי הנקודות לאורך ציקלואידה, $t_{1,2}^{cyc}$.
(נניח כי התנועה מתרחשת בין הראשית למינימום של הציקלואידה $x(\phi) = -a(\phi - \sin\phi), y(\phi) = a(1 - \cos\phi),\ a < 0$).

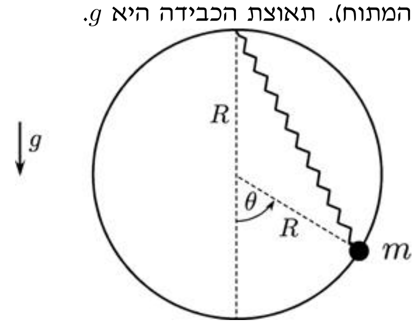
(א) חשבו את $t_{1,2}^{lin}$ משיקולי קינמטיקה

(ב) הניחו פרמטריציה $\phi(t) = \{0 \le t \le t_{1,2}^{cyc};\ \phi(0) = 0, \phi(t_{1,2}^{cyc}) = \pi\}$
וחשבו את $t_{1,2}^{cyc} = \int_1^2 ds/v$

(ג) הראו כי $t_{1,2}^{lin}/t_{1,2}^{cyc} = \sqrt{1 + 4/\pi^2}$

(ד) הראו כי $t_{1,2}^{cyc}$ כאשר נוסעים מנקודה $(x_1, y_1)$ למינימום של הציקלואידה $(-\pi a, 2a)$ קבוע לכל בחירה של נקודת התחלה $(x_1, y_1)$
(רמז: $\int_{\phi_0}^{\pi} \sqrt{\frac{1-\cos\phi}{\cos\phi_0 - \cos\phi}}\, d\phi = \pi$, כאשר $\phi_0$ הזוית בנקודת ההתחלה).

2. מסה נקודתית $m$ יכולה לנוע על תיל מעגלי חלק שרדיוסו $R$ הנמצא במישור אנכי. המסה מחוברת לנקודה הגבוהה ביותר של התיל באמצעות קפיץ קל בעל קבוע קפיץ $k$ שאורכו הרפוי $L$ (האנרגיה הפוטנציאלית היא $k(x-L)^2/2$ כאשר $x$ אורך הקפיץ המתוח). תאוצת הכבידה היא $g$.




(א) רשמו את הלגרנז'יאן.

(ב) מצאו את משוואת התנועה.

(ג) מצאו את נקודות שיווי המשקל.

(ד) מהן תדירויות התנודות הקטנות סביב נקודות שיווי המשקל היציבות?

3. יחסי הייזנברג המוכללים. מטרת תרגיל זה היא להכליל את יחסי אי־הודאות של הייזנברג לשלושה מימדים.

(א) נתונה פונקציה במרחב תלת מימדי $f(r),\ \ r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. הוכיחו: $[\hat{p}_x, f(\hat{r})] = -i\hbar\hat{x}\hat{r}^{-1}f'(\hat{r})$, כאשר $\hat{p}_x$ אופרטור התנע בכוון $x$ ו $\hat{r}$ אופרטור המקום.

(ב) נתון האופרטור $\hat{A}_x = \hat{p}_x + i\lambda\hat{x}f(\hat{r})$, כאשר $\lambda$ מספר ממשי. הוכיחו כי

$$\frac{\hbar^2\langle\hat{r}f'(\hat{r})+3f(\hat{r})\rangle^2}{4\langle\hat{r}^2f^2(\hat{r})\rangle} \le \langle\hat{p}^2\rangle.$$

לכל פונקציה ממשית $f(r)$ ומצב קוונטי $|\psi\rangle$.

(הדרכה: הגדירו $\|\hat{A}_i\|^2 = \sup_{|\psi\rangle}\langle\psi|\hat{A}_i^\dagger\hat{A}_i|\psi\rangle,\ i=x,y,z$, השתמשו בתוצאת 3א, ובתכונת החיוביות של הנורמה.)

(ג) נתון $f=1, f=1/r, f=1/r^2$. הוכיחו לכל אחת מהפונקציות בהתאמה:

$$\langle\hat{p}^2\rangle \ge \frac{9}{4}\hbar^2, \langle\hat{p}^2\rangle \ge \left\langle\hat{r}^{-1}\right\rangle^2, \langle\hat{p}^2\rangle \ge \frac{\hbar^2}{4}\left\langle\hat{r}^{-1}\right\rangle^2.$$

4. אופרטור $A$ מקיים $[A,L^2]=[A,L_x]=[A,L_y]=[A,L_z]=0$.

(א) מהם $[A,L_+]$ ו $[A,L_-]$?

(ב) נתון $A\,|l=8,m=0\rangle = 3\,|l=8,m=0\rangle$. הוכיחו $A\,|l=8,m\rangle = 3\,|l=8,m\rangle$ לכל $m$.

(ג) נתון $\langle l=8,m|\,L_-L_+\,|l=8,m\rangle = 42$ מהו $m$? (יש יותר מתשובה אחת אפשרית - כתבו את כולן)

5. (בונוס - לא חובה) בזמן $T=0$ רואה צופה נייח את חלליות $A$, $B$ במרחק 7 זו מזו כאשר חללית $A$ נעה במהירות $\beta_A = 0.8$ וחללית $B$ נעה במהירות $\beta_B = 0.6$ זו לקראת זו ושעוניהן מאופסים. מה יראו השעונים בכל אחת מהחלליות בזמן פגישתן?

## בהצלחה