

תרגיל 12 – אינפי 1

הערה לקבוצה של לואי

בתרגול האחרון היתה טעות חישוב. הנגזרת של $(e^{x^2})^{(m)}$ עבור $m = 2k$

מתקבלת מהשוואת המקדמים של x^{2k} . (בדקו את הפיתוח שבוצע בתרגול)

$$\frac{(e^{x^2})^{(2k)}(0)}{(2k)!} = \frac{1}{k!} \cdot \text{מכאן, } (e^{x^2})^{(2k)}(0) = \frac{(2k)!}{k!}$$

שאלה 1

תהי f רציפה בכל נקודה בקטע (a, ∞) כך ש- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ וגם $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = m \in \mathbb{R}$ (כלומר הגבולות הנ"ל קיימים וסופיים). הוכיחו ש- f רציפה במ"ש בקטע (a, ∞) .

שאלה 2

תהי פונקציה f המקיימת את התנאי הבא: קיים $k > 0$ כך שלכל $x_1, x_2 \in A$ מתקיים $|f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$ (זה נקרא תנאי ליפשיץ). הוכיחו/הפריכו: f רציפה במ"ש ב- A .

שאלה 3

הוכיחו על פי ההגדרה שהפונקציה הבאה רציפה במ"ש בקטע $[-4, 3]$:
 $f(x) = x^3 + x$.

שאלה 4

קבעו האם הפונקציות הבאות רציפות במ"ש בקטעים הנתונים:

א. $\sin e^x$ בקטע $(0, \infty)$

ב. $\ln x$ בקטע $(0, \infty)$

ג. $\sin \sqrt{(x+2\pi)}$ בקטע $(0, \infty)$

שאלה 5

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה במ"ש בכל קטע $[n, n+1]$ עבור $n \in \mathbb{N}$ אזי f רציפה במ"ש בכל \mathbb{R} .

ב. אם f, g רציפות במ"ש בקטע I אזי גם $f + g$ רציפה במ"ש בקטע I .

ג. אם f, g רציפות במ"ש בקטע I אזי גם $f \cdot g$ רציפה במ"ש בקטע I .

שאלה 6

הוכיחו את הטענה הבאה: יהיו f, g רציפות במ"ש וחסומות ב- \mathbb{R} . הוכיחו כי $f \cdot g$ רציפה במ"ש ב- \mathbb{R} .

שאלה 7

א. יהיו $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ רציפות במ"ש. הוכיחו כי $f \circ g$ (הרכבה) רציפה במ"ש.

ב. האם הפונקציה $f(x) = x^{\sqrt{2}}$ היא רציפה במ"ש ב- \mathbb{R} ?

• תזכורת (קירוב לינארי): $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ כאשר x קרוב ל- x_0 .

שאלה 8

תעריכו לפי הקירובים הלינאריים את הערכים הבאים:

א. $\arctan(1.01)$ (זכרו כי $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4}$)

ב. $(2.01)^{2\cos \ln(1.01)}$

שאלה 9

חשבו את הגבולות:

א. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{e^x}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

ב. $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{3x} - 5x)^{\frac{1}{x}}$

ג. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^2 \sin(x^2)}$

ד. $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x}$

שאלה 10

מצאו פונקציה $f(x)$ מוגדרת על \mathbb{R} כך ש-

$$f(3) = 2, f'(3) = 5, f''(3) = -4, f'''(3) = 7, f^{(4)}(3) = -1, f^{(5)}(3) = 6$$

שאלה 11

מצאו פולינום $P(x)$ כך שלכל $x \in (-1, 1)$ מתקיים $|xe^x - P(x)| < 10^{-4}$.

שאלה 12

השתמשו בפיתוח טיילור של הפונקציה $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ לחשב את $\ln 2$ עם טעות קטנה מ- $2 \cdot 10^{-4}$.

שאלה 13

(א) חשבו $(0) \cdot \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(m)}$

(ב) היעזרו בפולינום טיילור כדי וחשבו את $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)^2}{\ln(1+x) + \frac{x^2}{2}}$

בהצלחה בבחינה!