תרגול 13 – השלמה (יום שני)

<u>הגדרה – רציפות במידה שווה</u>

תהי f פונקציה ממשית המוגדרת על קבוצה A. אנו נאמר ש- f רציפה במידה שווה ב-A אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x_1,x_2\in A$ מתקיים:
$|x_1-x_2|<\delta \ \to \ \left|f(x_1)-f(x_2)\right|<\varepsilon$.

<u>הערה</u>

1. שימו לב להבדל שבין שתי ההגדרות:

רציפות: $\forall\varepsilon>0\ \forall x_0\in A\ \exists\delta>0\ \forall x\left(|x-x_0|<\delta\to|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\right)$

רבמ"ש: $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x_0\in A\ \forall x\left(|x-x_0|<\delta\to|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\right)$

2. שימו לב שרציפות במ"ש זו תכונה של הפונקציה בכל הקטע, להבדיל מרציפות שהיא תכונה נקודתית.

<u>תרגיל</u>

הוכיחו על פי ההגדרה שהפונקציה $f(x)=x+\sin x$ רציפה במ"ש בכל $\mathbb{R}$.

<u>פתרון</u>

נפתח: $\left|f(x_1)-f(x_2)\right|=\left|x_1+\sin x_1-x_2-\sin x_2\right|\le\left|x_1-x_2\right|+\left|\sin x_1-\sin x_2\right|$.

מתקיים

$$\left|\sin x_1-\sin x_2\right|=\left|2\cos\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\sin\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)\right|\le2\left|\sin\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)\right|\underset{*}{\le}2\left|\frac{x_1-x_2}{2}\right|=\left|x_1-x_2\right|.$$

(*) מתקיים $|\sin\alpha|\le|\alpha|$. לכן, $\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\le2\left|x_1-x_2\right|<2\delta$. נבחר $0<\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ ונקבל הדרוש.

מש"ל

<u>טענה</u>

על מנת להוכיח שפונקציה אינה רבמ"ש מספיק להראות שמתקיים אחד מהתנאים השקולים הבאים:

1) קיים $\varepsilon>0$ כך שלכל $\delta>0$ קיימים $x_1,x_2\in A$ כך ש $|x_1-x_2|<\delta$ וגם $\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|\geq\varepsilon$.

2) קיימים $\varepsilon>0$ וסדרות $\{x_n\},\{y_n\}\subseteq A$ כך ש $\lim_{n\to\infty}\left(x_n-y_n\right)=0$ וגם $\left|f\left(x_n\right)-f\left(y_n\right)\right|\geq\varepsilon$ החל ממקום מסויים.

<u>תרגיל</u>

הוכיחו שהפונקציה $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ אינה רבמ"ש בכל קטע מהצורה $(0,a)$ עבור $a>0$.

<u>פתרון</u>

נמצא סדרות $\{x_n\},\{y_n\}\subseteq(0,a)$ כך ש $\lim_{n\to\infty}\left(x_n-y_n\right)=0$ ו- $\left|\sin\left(\frac{1}{x_n}\right)-\sin\left(\frac{1}{y_n}\right)\right|$ אפילו שווה לקבוע. נבחר $x_n=\frac{1}{2\pi n},\ y_n=\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}$. מתקיים $\lim_{n\to\infty}\left(x_n-y_n\right)=0$ וכמו כן $\sin\left(\frac{1}{x_n}\right)=0,\ \sin\left(\frac{1}{y_n}\right)=1$ ולכן $\left|\sin\left(\frac{1}{x_n}\right)-\sin\left(\frac{1}{y_n}\right)\right|=1$.

הערה: שימו לב – יתכן ש $\{x_n\},\{y_n\}\not\subseteq(0,a)$ אבל בגלל ששתי הסדרות שואפות לאפס קיים אינדקס שממנו והלאה שתיהן מוכלות ב- $(0,a)$.

מש"ל

<u>תרגיל</u>

תהי $f(x)=\begin{cases}x^2+2 & 0\leq x\leq 2\\ 3x & 2\leq x<4\end{cases}$. הוכיחו שהיא רבמ"ש ב- $[0,4)$.

<u>פתרון</u>

נגדיר פונקציית עזר : $g(x)=\begin{cases}x^2+2 & 0\leq x\leq 2\\ 3x & 2\leq x\leq 4\end{cases}$. קל לבדוק ש- $g(x)$ רציפה בקטע הסגור $[0,4]$ ולכן לפי משפט קנטור היא רבמ"ש ב $[0,4]$. לכן $g(x)$ רבמ"ש בתת הקטע $[0,4)$ (שכן, אותה הדלתא עושה את העבודה) אבל שם היא מתלכדת עם $f(x)$ ולכן $f(x)$ רבמ"ש ב $[0,4)$.

מש"ל

<u>תרגיל</u>

הוכיחו כי $f(x)=\ln(x)$ לא רבמ"ש בקטע $(0,1]$.

<u>פתרון</u>

בדומה לתרגיל קודם נמצא סדרות $\{x_n\},\{y_n\}\subseteq(0,1]$ כך ש $\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$ ו $|\ln(x_n)-\ln(y_n)|=c$ כאשר c קבוע ממשי. נבחר: $x_n=\frac{1}{e^n},y_n=\frac{1}{e^{n-1}}$. מתקיים:
$\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$, $|\ln(x_n)-\ln(y_n)|=|\ln(e^{-n})-\ln(e^{-n+1})|=|-n-(-n+1)|=1$.

מש"ל

<u>תרגיל</u> (ממבחן)

תהי $f(x)$ פונקציה. נתון כי-$f(x)$ רבמ"ש בקטע $[a,b]$ וכן רבמ"ש בקטע $[b,c]$.
הוכיחו כי $f(x)$ רבמ"ש בקטע $[a,c]$.

<u>פתרון</u>

$f(x)$ רבמ"ש בקטעים $[a,b]$ ו-$[b,c]$ ולכן בפרט רציפה בקטעים אלו. נראה ש-$f(x)$ רציפה ב-$[a,c]$. יהי $x\in[a,c]$. ברור ש אם $x\neq b$, f רציפה ב-x. נראה ש-f רציפה גם בנקודה b.

f רציפה ב-$[a,b]$ ולכן $\lim_{x\to b^-}f(x)=f(b)$. f רציפה ב-$[b,c]$ ולכן $\lim_{x\to b^+}f(x)=f(b)$.
מכאן, $\lim_{x\to b}f(x)=f(b)$ והוכחנו רציפות ב-b ובסה"כ הוכחנו רציפות ב-$[a,c]$.
כעת עפ"י משפט קנטור נקבל ש-$f(x)$ רבמ"ש בקטע $[a,c]$.

מש"ל

<u>משפט</u>

תהי f פונקציה רציפה בקטע מוכלל I ונניח שהנגזרת קיימת בכל נקודה והנגזרת חסומה ב-I, אזי f רבמ"ש ב-I.

כלומר, הפונקציה רציפה במ"ש בקטע I אם:
$f\in C(I)\wedge\left(\exists M>0\ \forall x\in I:|f'(x)|>M\right)$.

<u>תרגיל</u>

הוכיחו כי $\sqrt{x}$ רבמ"ש ב $[0,\infty)$.

פתרון

$\sqrt{x}$ רציפה ב- $[0,1]$ ולכן לפי משפט קנטור רבמ"ש ב- $[0,1]$. $\sqrt{x}$ גזירה ב- $[1,\infty)$ ונגזרתה היא $0<\frac{1}{2\sqrt{x}}<\frac{1}{2}$ ולכן לפי המשפט הנ"ל היא רבמ"ש ב- $[1,\infty)$.

נוכיח שהפונקציה רבמ"ש ב- $[0,\infty)$. יהי $\varepsilon>0$. $\sqrt{x}$ רבמ"ש ב- $[0,1]$ ולכן קיים $\delta_1>0$ כך שאם $x,y\in[0,1]$ וגם $|x-y|<\delta_1$ אז $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

$\sqrt{x}$ רבמ"ש ב- $[1,\infty)$ ולכן קיים $\delta_2>0$ כך שאם $x,y\in[1,\infty)$ וגם $|x-y|<\delta_2$ אז $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$. יהי $0<\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. כעת תהיינה $x,y\in[0,\infty)$ המקיימות $|x-y|<\delta$. אם $x,y\in[0,1]$ או $x,y\in[1,\infty)$ סיימנו (מדוע?). אחרת, בה"כ, $x\in[0,1], y\in[1,\infty)$. $|x-y|<\delta$ ולכן $|x-1|<\delta$ וגם $|1-y|<\delta$ (מדוע?). לכן $|x-1|<\delta_1$ ו- $|f(x)-f(1)|<\frac{\varepsilon}{2}$. $|1-y|<\delta$ ולכן $|1-y|<\delta_2$ ו- $|f(1)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$. מאש"מ נקבל ש- $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

מש"ל

כלל להופיטל (l'Hospital 1661-1704)

תרגיל

חשבו את הגבולות הבאים:

א) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(5x)}{e^x-e^{-x}}$

ב) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{(\ln x)^2}}{e^{\sqrt{x}}}$

ג) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt[x]{2}-1\right)$

פתרון

א) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(5x)}{e^x-e^{-x}}\underset{\frac{0}{0}\ l'Hospital}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{5\cos(5x)}{e^x+e^{-x}}=\frac{5}{2}$

ב) $\frac{e^{(\ln x)^2}}{e^{\sqrt{x}}}=e^{(\ln x)^2-\sqrt{x}}$. נחשב את הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\left((\ln x)^2-\sqrt{x}\right)$.

$(\ln x)^2-\sqrt{x}=\ln^2 x\left(1-\frac{\sqrt{x}}{\ln^2 x}\right)$. למעשה נמצא את הגבול

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\ln^2 x}\underset{\frac{\infty}{\infty}\ l'Hospital}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{4\ln x}\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{8}=\infty$. לכן,

$\lim\limits_{x\to\infty}\left((\ln x)^2-\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\ln^2 x\left(1-\frac{\sqrt{x}}{\ln^2 x}\right)=\infty\cdot(-\infty)=-\infty$.

לבסוף, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{(\ln x)^2}}{e^{\sqrt{x}}}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{(\ln x)^2-\sqrt{x}}=0$.

[ההסבר למעבר האחרון: משפט על גבול של הרכבת פונקציות.]

ג) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt[x]{2}-1\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}\underset{\frac{0}{0}\ l'Hospital}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{x}}\cdot\ln 2\cdot\frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}2^{\frac{1}{x}}\cdot\ln 2=\ln 2$.

מש"ל

<u>תרגיל</u> (ממבחן)

יהי $n>1$ מספר טבעי. נניח ש f מוגדרת וגזירה $n+1$ פעמים בסביבת הנקודה 0 ושמתקיים $f(0)=f'(0)=\cdots f^{(n-1)}(0)=0$ אבל $f^{(n)}(0)=5$.

חשבו: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{(\sin(2x))^n}$.

<u>פתרון</u>

שימו לב $\frac{f(x)}{(\sin(2x))^n}=\frac{f(x)(2x)^n}{(2x)^n(\sin(2x))^n}=\frac{f(x)(2x)^n}{x^n(\sin(2x))^n 2^n}$. כעת, נשים לב ש $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(2x)^n}{(\sin(2x))^n 2^n}=\frac{1}{2^n}$. לכן מספיק לחשב את הגבול $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}$ ואז הגבול המקורי יהיה מכפלת הגבולות. עפ"י שימוש בכלל לופיטל מספר פעמים עבור גבול מהצורה $\frac{0}{0}$ נקבל:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{nx^{n-1}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(x)}{n(n-1)x^{n-2}}=\cdots=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)}{n!}=\frac{5}{n!}$. השוויון האחרון

מתקבל מהעובדה ש $f^{(n)}(x)$ רציפה באפס (אפילו גזירה!) ולכן הגבול הוא הערך בנקודה. לסיכום $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{(\sin(2x))^n}=\lim_{x\to 0}\frac{(2x)^n}{(\sin(2x))^n\,2^n}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=\frac{5}{2^n n!}$.

משל"ל