פתרון 1

שאלה 1:

א.* הוכח: $\sup A \le \inf B$ (תרגיל חשוב מאד. יש להשתמש באפסילון)

פתרון: נניח בשלילה ש $\sup A > \inf B$ ניקח $\varepsilon = \dfrac{\sup A - \inf B}{2} > 0$ אזי

$\sup A - \varepsilon = \dfrac{\sup A + \inf B}{2}$ שזה אמצע הקטע $[\inf B, \sup A]$. אבל לפי משפט קיים $a \in A$ כך ש $a > \sup A - \varepsilon$.

$\sup A - \varepsilon = \dfrac{\sup A + \inf B}{2} = \inf B + \varepsilon$ אבל לפי משפט קיים $b \in B$ כך ש $b < \inf B + \varepsilon = \sup A - \varepsilon < a$. ובסיכום מצאנו $b < a$ בסתירה לנתון.

ב. נניח שמתקיים שיוויון בסעיף א', כלומר, $\sup A = \inf B$. הוכח/הפרך: $A \cap B \ne \phi$.
(במילים: יש איבר שנמצא גם ב A וגם ב B).

הפרכה: ניקח $A = (0,1)$ ו- $B = (1,2)$. $\sup A = \inf B = 1$ אבל $A \cap B = \phi$.

ג. אם הוכחת בסעיף ב', מה הוא האיבר המשותף ל A ו B? אם הפרכת, מתי כן יהיה לשתי הקבוצות איבר משותף?

תשובה: האיבר המשותף יתקיים כאשר ל A יהיה מקסימום, ול B יהיה מינימום. ואזי $\sup A \in A$ ו $\inf B \in B$.

שאלה 2:

א. אם A חסומה מלעיל אזי A^{-1} חסומה מלעיל

ב. אם A חסומה מלעיל אזי A^{-1} חסומה מלרע

ג. אם A^{-1} חסומה מלעיל אזי A חסומה מלעיל

ד. אם A^{-1} חסומה מלעיל אזי A חסומה מלרע

הפרכה: ניקח $A = (-1,0) \cup (0,1) = \{x \in R \mid -1 < x < 0, or, 0 < x < 1\}$. A חסומה על ידי ± 1 אבל A^{-1} אינה חסומה מלעיל ואינה חסומה מלרע (שכן אחד חלקי מספר קטן חיובי הולך לאינסוף, ואחד חלקי מספר קטן שלילי הולך למינוס אינסוף). $(A^{-1})^{-1} = A$ ולכן גם הכיוונים ההפוכים לא נכונים.