**חשבון אינפי 1 למדמ"ח**

**תרגיל 13- פתרון**

1. חשבו את הגבולות הבאים בעזרת משפט הסנדוויץ':

**א.** $\lim_{n\to\infty}\frac{1\sin 1+2\sin 2+...+n\sin n}{n^3}$

**פתרון:**

$$0\le\left|\frac{1\sin 1+2\sin 2+...+n\sin n}{n^3}\right|\le\frac{1\cdot|\sin 1|+2|\sin 2|+...+n|\sin n|}{n^3}$$

$$\le\frac{1+2+...+n}{n^3}=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{(1+n)\cdot n}{2}=\frac{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}}{2}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

המעבר השני לאי השוויון נכון לפי אי שוויון המשולש,

המעבר השלישי נכון, כי $|\sin x|\le 1$ לכל $x\in\mathbb{R}$,

המעבר לשוויון נכון לפי הנוסחה של סכום של $n$ איברים ראשונים של סדרה חשבונית.

לסיכום ראינו שהסדרה הנתונה חסומה בין שתי סדרות השואפות לאפס ולכן לפי משפט הסנדוויץ':

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\sin 1+2\sin 2+...+n\sin n}{n^3}=0$$

**ב.** $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+...+\frac{1}{n^2+n}\right)$

**פתרון:**

$\frac{n}{n^2+n}\le\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+...+\frac{1}{n^2+n}\le\frac{n}{n^2+1}$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=0$ ולכן לפי משפט הסנדוויץ'

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+...+\frac{1}{n^2+n}\right)=0$$

**ג.** $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{5^n+(-1)^n+9^n}$

**פתרון:**

$$9=\sqrt[n]{9^n}\le\sqrt[n]{5^n+(-1)^n+9^n}\le\sqrt[n]{3\cdot 9^n}=3^{\frac{1}{n}}\cdot 9\xrightarrow[n\to\infty]{}9$$

ולכן לפי משפט הסנדוויץ'

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{5^n+\left(-1\right)^n+9^n}=9$$

**2.** הוכיחו כי הסדרות הרקורסיביות הבאות מתכנסות וחשבו את גבולותיהן:

**א.** סדרה המוגדרת ע"י $a_1=1, a_{n+1}=\sqrt{3a_n}$

**הוכחה:**

ננחש את גבול הסדרה:

נסמן $\lim_{n\to\infty}a_n=L$

$$L=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{3a_n}=\sqrt{3L}$$

נפתור את המשוואה $L=\sqrt{3L}$ ביחס ל- $L$ ונקבל $L=3$ או $L=0$.

מאחר וכל אברי הסדרה חיוביים נקבל שהגבול האפשרי היחיד הינו $L=3$.

כעת נוכיח שהסדרה אכן מתכנסת.

**1.** נוכיח שהסדרה חסומה

הסדרה חסומה מלרע ע"י $0$, כי כל אברי הסדרה חיוביים ולכן נותר להוכיח שהסדרה חסומה מלעיל.

נוכיח באינדוקציה על $n$ שהסדרה חסומה מלעיל ע"י $3$.

**בסיס האינדוקציה:** $a_1=1\le 3$

**הנחת האינדוקציה:** נניח $a_n\le 3$

**נוכיח:** $a_{n+1}\le 3$.

$a_{n+1}=\sqrt{3a_n}\le\sqrt{3\cdot 3}=3$ (המעבר הראשון נכון לפי הגדרת הסדרה והמעבר השני נכון לפי הנחת האינדוקציה)

לסיכום הוכחנו ש- $0<a_n\le 3$ לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכן הסדרה חסומה.

**2.** נוכיח מונוטוניות

$\forall n\in\mathbb{N}\quad a_{n+1}-a_n=\sqrt{3a_n}-a_n=\dfrac{3a_n-a_n^{\ 2}}{\sqrt{3a_n}+a_n}\ge 0$, כי המכנה תמיד חיובי והמונה חיובי, כי הוכחנו ש-$0<a_n\le 3$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

לסיכום הוכחנו שהסדרה חסומה ומונוטונית עולה ולכן לפי משפט מתכנסת.

ולפי החישוב שעשינו קודם $\lim_{n\to\infty}a_n=3$

**ב.** סדרה המוגדרת ע"י $a_1=10, a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)$.

**הוכחה:**

ננחש את גבול הסדרה:

נסמן $\lim_{n\to\infty}a_n=L$

$$L=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)=\frac{1}{2}\left(L+\frac{1}{L}\right)$$

נפתור את המשוואה $L=\frac{1}{2}\left(L+\frac{1}{L}\right)$ ביחס ל- $L$ ונקבל $L^2-1=0$ ולכן $L=1$ או $L=-1$

, אבל מאחר וכל אברי הסדרה חיוביים הגבול האפשרי היחיד הינו $L=1$.

כעת נוכיח שהסדרה אכן מתכנסת:

**1.** נוכיח שהסדרה חסומה מלרע ע"י 1.

$a_{n+1}-1=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)-1=\frac{1}{2}\left(\frac{a_n{}^2-2a_n+1}{a_n}\right)=\frac{(a_n-1)^2}{2a_n}\geq 0$ ולכן $a_{n+1}\geq 1$ לכל $n$ טבעי.

**2.** נוכיח מונוטוניות

$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)-a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1-a_n{}^2}{a_n}\right)\leq 0$ , כי הוכחנו ש- $a_n\geq 1$ ולכן הסדרה מונוטונית יורדת.

בגלל שהסדרה יורדת היא חסומה מלעיל ע"י האיבר הראשון שלה, כלומר $1\leq a_n\leq 10$ ולכן הסדרה חסומה.

לסיכום הוכחנו שהסדרה מונוטונית יורדת וחסומה ולכן לפי משפט מתכנסת.

ולפי החישוב שעשינו קודם $\lim_{n\to\infty}a_n=1$.

**3.** עבור הסדרות הבאות אם הסדרה חסומה מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה והסבירו מדוע אלה כולם ואם הסדרה אינה חסומה מצאו תת סדרה המתבדרת לאינסוף:

**א.** $$\langle a_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}=\left\langle\frac{7^n+(-7)^n}{5^n}\cdot\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right\rangle_{n\in\mathbb{N}}$$

**פתרון:**

נגדיר:

$$\langle b_n\rangle=\left\langle\frac{7^n+(-7)^n}{5^n}\right\rangle\ ,\ \langle c_n\rangle=\left\langle\cos\frac{\pi n}{2}\right\rangle_{n=1}^{\infty}$$

$$\forall n\geq 1\ \ a_n=b_nc_n$$

$$\lim_{n\to\infty} b_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{7^{2n+1} + (-7)^{2n+1}}{5^{2n+1}} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} b_{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 7^{2n}}{5^{2n}} = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} c_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} c_{4n} = \lim_{n\to\infty} \cos 2\pi n = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} c_{4n+2} = \lim_{n\to\infty} \cos(2\pi n + \pi) = -1$$

ומכאן נקבל:

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} b_{2n+1}c_{2n+1} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{4n} = \lim_{n\to\infty} b_{4n}c_{4n} = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{4n+2} = \lim_{n\to\infty} b_{4n+2}c_{4n+2} = -\infty$$

כלומר מצאנו שתי תתי סדרה המתבדרות לפלוס אינסוף ולמינוס אינסוף ולכן סדרה זו אינה חסומה.

**ב.** $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}} = \left\langle \frac{\sqrt{\sqrt{n} + 2\sqrt[3]{n}}}{\sqrt[4]{2n+\sqrt{3n}}} \right\rangle_{n\in\mathbb{N}}$

**פתרון:**

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\sqrt{n} + 2\sqrt[3]{n}}}{\sqrt[4]{2n+\sqrt{3n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+2n^{-\frac{1}{6}}}}{\sqrt[4]{2+\sqrt{3}n^{-\frac{1}{2}}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

זהו גבול חלקי יחיד , כי הסדרה $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}} = \left\langle \frac{\sqrt{\sqrt{n} + 2\sqrt[3]{n}}}{\sqrt[4]{2n+\sqrt{3n}}} \right\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ מתכנסת ולכן כל תת סדרה שלה מתכנסת לאותו גבול .

**4.** תהיינה $\langle a_n \rangle$ ו- $\langle b_n \rangle$ שתי סדרות נתונות. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

**א.** $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ו- $\langle b_n \rangle$ חסומה, אזי $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

**תשובה:** הטענה נכונה.

**הוכחה:**

נתון ש- $\langle b_n \rangle$ חסומה ולכן קיים קבוע ממשי $M \geq 0$ כך ש- $|b_n| \leq M$.

ומכאן נקבל $0 \leq |a_n b_n| \leq M|a_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ולכן לפי משפט הסנדוויץ' $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

**ב.** אם $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$, אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ או $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

**תשובה:** לא נכון

**דוגמא נגדית**

$\langle a_n\rangle=\left\langle\frac{1-(-1)^n}{2}\right\rangle=\begin{cases}0 & n=2k, k\in\mathbb{N}\\ 1 & n=2k-1, k\in\mathbb{N}\end{cases}$ סדרה מתבדרת, כי יש לה שתי תתי סדרה המתכנסות לגבולות שונים ( 0 ו-1)

$\langle b_n\rangle=\left\langle\frac{1+(-1)^n}{2}\right\rangle=\begin{cases}1 & n=2k, k\in\mathbb{N}\\ 0 & n=2k-1, k\in\mathbb{N}\end{cases}$ סדרה מתבדרת, כי יש לה שתי תתי סדרה המתכנסות לגבולות שונים ( 0 ו-1), אבל

$\langle a_nb_n\rangle=\left\langle\left(\frac{1-(-1)^n}{2}\right)\left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right)\right\rangle=\langle 0\rangle$ סדרה קבועה של אפסים ולכן $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$.

**ג.** אם $\langle a_n+b_n\rangle$ מתכנסת, אז $\langle a_n\rangle$ ו- $\langle b_n\rangle$ מתכנסות.

**תשובה:** לא נכון

**דוגמא נגדית:**

$\langle a_n\rangle=\left\langle(-1)^n\right\rangle$ מתבדרת

$\langle b_n\rangle=\left\langle(-1)^{n+1}\right\rangle$ מתבדרת

אבל $\langle a_n+b_n\rangle=\left\langle(-1)^n+(-1)^{n+1}\right\rangle=\langle 0\rangle$ מתכנסת לאפס.

**ד.** אם $\langle a_n\rangle$ סדרת חסומה, אזי $\langle a_n\rangle$ היא סדרת קושי.

**תשובה:** לא נכון

**דוגמא נגדית:**

$\langle a_n\rangle=\left\langle(-1)^n\right\rangle$ סדרה חסומה שאינה סדרת קושי.

**ה.** אם $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\infty$, אז $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\infty$

**תשובה:** הטענה לא נכונה

**דוגמא נגדית:**

$\langle a_n\rangle=\langle -n^2\rangle$ , $\langle b_n\rangle=\langle -n\rangle$ , $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n^2}{-n}=\lim\limits_{n\to\infty}n=\infty$ , אבל

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}\left(-n^2+n\right)=-\infty\neq\infty$$

**אבל אם** $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$ **, אזי הטענה נכונה**

**הוכחה:**

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}b_n\left(\frac{a_n}{b_n}-1\right)$$

נתון $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\infty$ ולכן עבור $H\in\mathbb{N}^*\setminus\mathbb{N}$ $\frac{a_H}{b_H}$ הינו מספר אינסופי חיובי ולכן גם $\frac{a_H}{b_H}-1$ אינסופי חיובי. נתון גם $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$ ולכן $b_H$ הינו אינסופי חיובי ולכן $b_H\left(\frac{a_H}{b_H}-1\right)$ אף הוא אינסופי חיובי ולכן

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-b_n\right)=\lim_{n\to\infty}b_n\left(\frac{a_n}{b_n}-1\right)=\infty$$

**ו.** אם $\lim_{n\to\infty}\left(a_n-b_n\right)=\infty$, אז $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\infty$

**תשובה:** לא נכון

**דוגמא נגדית:**

$\langle b_n\rangle=\langle n\rangle$ ,$\langle a_n\rangle=\langle 2n\rangle$

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-b_n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(2n-n\right)=\lim_{n\to\infty}n=\infty$, אבל $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n}=2\neq\infty$.