תרגול 12

חישוב e^A כאשר A מטריצה מסדר 2

A מטריצה אלכסונית.

אם A מטריצה $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ אז מתקיים $\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n$ לכל n טבעי.

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^n}{n!} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^n}{n!} & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_2^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix}.$$

דוגמא

$$e^{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}.$$

A מטריצה לכסינה.

אם A מטריצה לכסינה אז קיימת מטריצה הפיכה P כך ש $A = PDP^{-1}$ ו D מטריצה אלכסונית ואז מתקיים $A^n = PD^nP^{-1}$ לכל n טבעי.

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n P^{-1} = P\left[\sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^n}{n!} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2^n}{n!} \end{pmatrix}\right]P^{-1}$$

$$= P \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^n}{n!} & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_2^n}{n!} \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix} P^{-1}$$

דוגמא

נניח ש $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$. נמצא את הערכים העצמיים $\left|\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 9 & -\lambda \end{pmatrix}\right| = 0 \Leftarrow \lambda^2 - 9 = 0 \Leftarrow \lambda = \pm 3$.

הווקטור העצמי שמתאים ל $\lambda = 3$ הוא $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. הווקטור העצמי שמתאים ל $\lambda = -3$ הוא $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

סה"כ נקבל $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ ואז $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$ ואז

$$e^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^3 & 0 \\ 0 & e^{-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

מטריצה בצורת זורדן

אם $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$ אז $A=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

מכיוון ש $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}^2$ נקבל ש $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=e^{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}}$.

מכיוון שהמטריצות $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$ מתחלפות ז"א $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$ נקבל ש:

$$e^A=e^{\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}}=e^{\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}}\cdot e^{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}e^\lambda & 0\\ 0 & e^\lambda\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^\lambda & e^\lambda\\ 0 & e^\lambda\end{pmatrix}.$$

<u>דוגמא</u>

$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ אז $e^A=\begin{pmatrix}e^2 & e^2\\ 0 & e^2\end{pmatrix}$.

<u>מטריצה לא לכסינה שניתנת לז'ירדון</u>

אם A מטריצה לא לכסינה שניתנת לז'ירדון אז קיימת מטריצה הפיכה P כך ש $A=PJP^{-1}$ ו J מטריצת זורדן ואז מתקיים $A^n=PJ^nP^{-1}$ לכל n טבעי.

$$e^A=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot A^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}PJ^nP^{-1}=P\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}J^n\right]P^{-1}$$
$$=Pe^JP^{-1}$$

<u>דוגמא</u>

$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ \frac{1}{2} & 3\end{pmatrix}$.

נמצא את הערך העצמי $\left|\begin{pmatrix}1-\lambda & -2\\ \frac{1}{2} & 3-\lambda\end{pmatrix}\right|=0 \Rightarrow (1-\lambda)\cdot(3-\lambda)+1=0 \Rightarrow \lambda=2$.

$A-2I=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$ מכיוון ש $\begin{pmatrix}-1 & -2\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ נקבל ש

$\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}\in N(A-2I)\cap C(A-2I)$. מכיוון ש $\begin{pmatrix}-1 & -2\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$ נקבל ש

$P=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ ואז $P^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$. $J=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

$$e^A=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot e^{\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}e^2 & e^2\\ 0 & e^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}.$$

<u>תרגיל ממבחן תשע"א סמסטר ב מועד א</u>

חשב e^A באשר $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ רמז: עדיף בלי למצוא את צורת ז'ורדן של A.

<u>פתרון</u>

$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$. מכיון שהמטריצות $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ לא מתחלפות ז"א $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ אז לא מתקיים בהכרח השוויון $e^{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}}=e^{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}}\cdot e^{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}}$.

יש לחשב את $e^{\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}}$ בדרך אחרת.

נשים לב ש $\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$ ולכן מתקיים $A^n=A$ לכל $1<n$ (n מספר טבעי).

$$e^A=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n=I+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}A=I+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}-1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e&e-1\\0&1\end{pmatrix}$$