תרגול 2

פתרון אינטגרלים של פונקציות רציונליות

פונקציה רציונלית $\frac{P(x)}{Q(x)}$ נקראת פשוטה אם מעלת הפולינום $P(x)$ קטנה ממעלת הפולינום $Q(x)$.

בעזרת חילוק פולינומים ניתן להגיע לפונקציה רציונלית פשוטה.

אינטגרציה של שברים אלגברים

שלב 1

אם מעלת המונה גדולה או שווה למנת המכנה יש לחלק את המונה במכנה והציג את השבר כסכום של החלק השלם ופונקציה רציונאלית $\frac{R(x)}{Q(x)}$ כאשר מעלת הפולינום $R(x)$ קטנה ממעלת הפולינום $Q(x)$.

שלב 2

א. כאשר חזקת המונה קטנה מחזקת המכנה יש לפרק את המכנה של השבר האלגברי לגורמים.
ב. יש לרשום את הצגת השבר האלגברי כסכום של מחוברים.
ג. יש לפתור את האינטגרל של כל אחד מהמחוברים בנפרד.

דוגמא

$$\frac{x^3}{x+2}=\left(x^2-2x+4\right)-\frac{8}{x+2}.$$

נלמד לפתור אינטגרלים מהצורה $\frac{ax+b}{x^2+px+q}$.

נשים לב ש $Q'(x)=2x+p$ ואז ניתן לרשום את השבר באופן הבא

$\frac{\frac{a}{2}(2x+p)+b-\frac{pa}{2}}{x^2+px+q}$ נסמן $t=b-\frac{pa}{2}$ ונשאר לנו לפתור את האינטגרל הבא:

$$\frac{a}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx+t\int\frac{1}{x^2+px+q}dx.$$

את האינטגרל של המחובר הראשון אנחנו יודעים לפתור בעזרת שיטת ההצבה.

נשאר ללמוד לפתור את האינטגרל $\int\frac{1}{x^2+px+q}dx$.

דוגמא

נפתור את האינטגרל $\int\frac{3x+5}{x^2+2x+1}dx$.

נשים לב ש $Q'(x)=2x+2$.

$$\int\frac{3x+5}{x^2+2x+1}dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+1}dx+2\int\frac{1}{x^2+2x+1}dx.$$

המחובר הראשון ניתן לפתור בעזרת שיטת ההצבה ולקבל $\frac{3}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+1}dx=\frac{3}{2}\ln\left(x^2+2x+1\right)$.

המחובר השני נפתור באופן הבא: $2\int\frac{1}{x^2+2x+1}dx=2\int\frac{1}{(x+1)^2}dx=\frac{-2}{x+1}$.

סה"כ נקבל $\int\frac{3x+5}{x^2+2x+1}dx=\frac{3}{2}\ln\left(x^2+2x+1\right)-\frac{2}{x+1}$.

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}dx$$

מקרה 1

$$p^2-4q=0$$

במקרה כזה ניתן לרשום $\int \frac{1}{x^2+px+q}dx = \int \frac{1}{(x+n)^2}dx = -\frac{1}{x+n}$.

דוגמא

$\int \frac{1}{x^2+6x+9}dx$ נשים לב ש $6^2-4\cdot 9=0$.

$$\int \frac{1}{x^2+6x+9}dx = \int \frac{1}{(x+3)^2}dx = -\frac{1}{x+3}+c.$$

מקרה 2

$$p^2-4q<0$$

ניתן לרשום את x^2+px+q באופן הבא

$$x^2+px+q = x^2+px+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}$$

נשתמש באינטגרל המידי $\int \frac{1}{(x+b)^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x+b}{a}$.

דוגמא

$$\int \frac{1}{x^2+4x+8}dx = \int \frac{1}{x^2+4x+4+4}dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+4}dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+2^2}dx = \frac{1}{2}\arctan\frac{x+2}{2}$$

מקרה 3

$p^2-4q>0$ ואז למשוואה $x^2+px+q=0$ יש שני פתרונות $x_1=\alpha, x_2=\beta$ ואז $x^2+px+q=(x-\alpha)(x-\beta)$.

$\int \frac{1}{x^2+px+q}dx = \int \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}dx = \frac{1}{\alpha-\beta}\int\left(\frac{1}{x-\alpha}-\frac{1}{x-\beta}\right)dx$ וקיבלנו אינטגרל שאנחנו יודעים לפתור.

דוגמא

$$\int \frac{1}{x^2+4x+3}dx = \int \frac{1}{(x+1)(x+3)}dx = \frac{1}{2}\int (\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3})dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+3}dx =$$

$$\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x+3|$$

נלמד בשיעור לפתור אינטגרלים מהצורה $\frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}} = \frac{ax+b}{\sqrt{x^2+px+q}}$.

נשים לב ש $Q'(x)=2x+p$ ואז ניתן לרשום את השבר באופן הבא

$\frac{\frac{a}{2}(2x+p)+b-\frac{pa}{2}}{\sqrt{x^2+px+q}}$ נסמן $t=b-\frac{pa}{2}$ ונשאר לנו לפתור את האינטגרל הבא:

$$\frac{a}{2}\int \frac{2x+p}{\sqrt{x^2+px+q}}dx + t\int \frac{1}{\sqrt{x^2+px+q}}dx.$$

את האינטגרל של המחובר הראשון אנחנו יודעים לפתור בעזרת שיטת ההצבה.

נשאר ללמוד לפתור את האינטגרל $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+px+q}}dx$.

<u>מקרה 1</u>

$p^2-4q=0$

במקרה כזה ניתן לרשום $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+px+q}}dx=\int \frac{1}{\sqrt{\left(x+n\right)^2}}dx=\int \frac{1}{x+n}dx=\ln\left|x+n\right|+C$.

<u>דוגמא</u>

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+6x+9}}dx$ נשים לב ש $6^2-4\cdot 9=0$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+6x+9}}dx=\int \frac{1}{\sqrt{\left(x+3\right)^2}}dx=\int \frac{1}{x+3}dx=\ln\left|x+3\right|+C .$$

<u>מקרה 2</u>

$p^2-4q<0$

ניתן לרשום את x^2+px+q באופן הבא

$$x^2+px+q=x^2+px+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}$$

נשתמש באינטגרל המידי $\int \frac{1}{\sqrt{\left(x+b\right)^2+a^2}}dx=\ln\left(\left(x+b\right)+\sqrt{\left(x+b\right)^2+a^2}\right)$.

<u>דוגמא</u>

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+8}}dx=\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+4+4}}dx=\int \frac{1}{\sqrt{\left(x+2\right)^2+4}}dx=\ln\left(\left(x+2\right)+\sqrt{\left(x+2\right)^2+4}\right)$$

<u>מקרה 3</u>

$p^2-4q>0$ ואז ניתן לקבל m,n כך ש $x^2+px+q=\left(x+n\right)^2-m^2$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+px+q}}dx=\int \frac{1}{\sqrt{\left(x+n\right)^2-m^2}}dx=\ln\left|\left(x+n\right)+\sqrt{\left(x+n\right)^2-m^2}\right|+C .$$

<u>דוגמא</u>

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx=\int \frac{1}{\sqrt{\left(x+2\right)^2-1^2}}dx=\ln\left|\left(x+2\right)+\sqrt{\left(x+2\right)^2-1^2}\right| .$$

<u>מקרה 4</u>

$p^2-4q>0$ ואז ניתן לקבל m,n כך ש $-x^2-px-q=m^2-\left(x+n\right)^2$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-px-q}}dx=\int \frac{1}{\sqrt{m^2-\left(x+n\right)^2}}dx=\arcsin\frac{x+n}{m}+C .$$

<u>דוגמא</u>

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-4x-3}}dx=\int \frac{1}{\sqrt{1^2-\left(x+2\right)^2}}dx=\arcsin\left(x+2\right)+C .$$

<u>תרגיל</u>

רשום את צורת הפירוק לסכום של שברים אלמנטאריים (ז"א חזקת המונה קטנה מחזקת המכנה) של השבר האלגברי הנתון:

$\frac{x^2-x+5}{x^2\left(x^2+4\right)}$.

<u>פתרון</u>

$$\frac{x^2-x+5}{x^2\left(x^2+4\right)}=\frac{x^2}{x^2\left(x^2+4\right)}+\frac{-x+5}{x^2\left(x^2+4\right)}=\frac{1}{x^2+4}+\frac{-x+5}{x^2\left(x^2+4\right)}.$$

נשאר לרשום את $\frac{-x+5}{x^2\left(x^2+4\right)}$ כסכום של שברים אלגבריים.

$$\frac{-x+5}{x^2\left(x^2+4\right)}=\frac{Ax+B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$$

<u>דרך 1 – עקרון הצבת המספרים</u>

נציב במקום x את המספרים $-2,-1,1,2$ נקבל ארבע משוואות ונוכל לחשב את A,B,C,D.

בד"כ כדאי להציב מספרים קטנים.

נציב $x=1$ ונקבל

$$\frac{-1+5}{1^2\left(1^2+4\right)}=\frac{A+B}{1^2}+\frac{C+D}{1^2+4}\Rightarrow\frac{4}{5}=A+B+\frac{C}{5}+\frac{D}{5}\Rightarrow 4=5A+5B+C+D$$

נציב $x=2$ ונקבל

$$\frac{-2+5}{2^2\left(2^2+4\right)}=\frac{2A+B}{2^2}+\frac{2C+D}{2^2+4}\Rightarrow\frac{3}{32}=\frac{2A+B}{4}+\frac{2C+D}{8}\Rightarrow 3=16A+8B+8C+4D$$

נציב $x=-1$ ונקבל

$$\frac{1+5}{1\cdot(1+4)}=\frac{-A+B}{1}+\frac{-C+D}{1+4}\Rightarrow\frac{6}{5}=-A+B+\frac{-C+D}{5}\Rightarrow 6=-5A+5B-C+D$$

נציב $x=-2$ ונקבל

$$\frac{2+5}{2^2\left(2^2+4\right)}=\frac{-2A+B}{2^2}+\frac{-2C+D}{2^2+4}\Rightarrow\frac{7}{32}=\frac{-2A+B}{4}+\frac{-2C+D}{8}\Rightarrow 7=-16A+8B-8C+4D$$

יש לפתור את מערכת המשוואות

$$A=-\frac{1}{4},B=\frac{5}{4},C=\frac{1}{4},D=-\frac{5}{4}\Leftarrow\begin{cases}5A+5B+C+D=4\\16A+8B+8C+4D=3\\-5A+5B-C+D=6\\-16A+8B-8C+4D=7\end{cases}$$

$$\frac{-x+5}{x^2\left(x^2+4\right)}=\frac{-x+5}{4x^2}+\frac{x-5}{4\left(x^2+4\right)}$$

סה"כ נקבל ש

$$\frac{x^2-x+5}{x^2\left(x^2+4\right)}=\frac{x^2}{x^2\left(x^2+4\right)}+\frac{-x+5}{x^2\left(x^2+4\right)}=\frac{1}{x^2+4}+\frac{-x+5}{4x^2}+\frac{x-5}{4\left(x^2+4\right)}=\frac{-x+5}{4x^2}+\frac{x-1}{4\left(x^2+4\right)}$$