<u>תרגיל</u>

תהי f רציפה בכל נקודה בקטע (a,∞) כך ש- $\lim_{x\to\infty} f(x)=l\in\mathbb{R}$ וגם $\lim_{x\to a^+} f(x)=m\in\mathbb{R}$ (כלומר הגבולות הנ"ל קיימים וסופיים). הוכיחו ש- f רציפה במ"ש בקטע (a,∞).

<u>פתרון</u>

יהי $\varepsilon>0$. מכיוון ש- $\lim_{x\to\infty} f(x)=l$ קיים $M>0$ כך שלכל $x>M$ מתקיים $\left|f(x)-l\right|<\frac{\varepsilon}{2}$ לכן בפרט לכל $x_1,x_2\in(M,\infty)$ מתקיים

$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|=\left|f(x_1)-l+l-f(x_2)\right|\le\left|f(x_1)-l\right|+\left|l-f(x_2)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ ללא תלות במרחק בין x_1,x_2 כלל.

ניתן להשלים את f לפונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,M+1]$ ע"י הגדרה $f(a)=\lim_{x\to a^+} f(x)=m$ ולכן היא רציפה שם במ"ש עפ"י משפט קנטור. ולכן f רבמ"ש בתת קטע $(a,M+1]$. לכן קיים $\delta>0$ (וניתן גם לבחור $0<\delta<1$) כך שלכל $x_1,x_2\in(a,M+1]$ המקיימים $|x_1-x_2|<\delta$ מתקיים $\left|f(x_1)-f(x_2)\right|<\varepsilon$.

ביחד לכל $|x_1-x_2|<\delta<1$, $x_1,x_2\in(a,\infty)$, מתקיים $x_1,x_2\in(a,M+1]$ או $x_1,x_2\in(M,\infty)$ ולכן $\left|f(x_1)-f(x_2)\right|<\varepsilon$ ולכן הפונקציה רבמ"ש.

מש"ל