

אינפי 1 - תרגיל 2

1. הוכח ש  $\sqrt{3}$  אינו רציונאלי

2. יהי  $x \in \mathbb{R}$  מספר ממשי המקיים  $x \geq 0$ . נניח בנוסף  $\forall \varepsilon > 0: x < \varepsilon$ . הוכח/הפוך:  $x = 0$ .

3. תהי  $A \subseteq \mathbb{R}$  כך שקיים  $\varepsilon > 0$  כך ש  $\forall a \in A: a > \varepsilon$  הוכח שאפס אינו החסם התחתון של  $A$ .

4. תהיי  $B = \left\{ (-1)^{n-1} \left( 2 + \frac{3}{n} \right) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ . מצא חסם עליון, חסם תחתון, מינימום ומקסימום (כאשר הם קיימים)

5. יהיו קבוצות לא ריקות  $A, B \subseteq \mathbb{R}$ , נניח שמתקיים  $\forall a \in A, \forall b \in B: a \leq b$  (כל איבר ב  $A$  קטן שווה מכל איבר ב  $B$ )

\*א. הוכח:  $\sup A \leq \inf B$  (תרגיל חשוב מאד. יש להשתמש באפסילון)

ב. נניח שמתקיים שיוויון בסעיף א', כלומר,  $\sup A = \inf B$ . הוכח/הפוך:  $A \cap B \neq \emptyset$  (במילים: יש איבר שנמצא גם ב  $A$  וגם ב  $B$ ).

ג. אם הוכחת בסעיף ב', מה הוא האיבר המשותף ל  $A$  ו  $B$ ? אם הפרכת, מתי כן יהיה לשתי הקבוצות איבר משותף?

6. תהי  $A \subseteq \mathbb{R}$ , נתון  $0 \notin A$ . נגדיר את הקבוצה  $A^{-1}$  באופן הבא  $A^{-1} = \left\{ \frac{1}{a} \mid a \in A \right\}$ . הוכח או הפוך על ידי דוגמא נגדית:

א. אם  $A$  חסומה מלעיל אזי  $A^{-1}$  חסומה מלעיל

ב. אם  $A$  חסומה מלעיל אזי  $A^{-1}$  חסומה מלרע

ג. אם  $A^{-1}$  חסומה מלעיל אזי  $A$  חסומה מלעיל

ד. אם  $A^{-1}$  חסומה מלעיל אזי  $A$  חסומה מלרע

7. תהי  $A \subseteq \mathbb{R}$  קבוצה חסומה מלעיל. נגדיר  $B = \{-a \mid a \in A\}$  הוכח ש  $B$  חסומה מלרע וש-  
 $\inf B = -\sup A$

8. תהי  $A \subseteq \mathbb{R}$  כך ש  $\forall a \in A: a > 0$  ותהיי  $A^{-1} = \left\{ \frac{1}{a} \mid a \in A \right\}$ .

הוכח ש  $m$  חסם תחתון של  $A \Leftrightarrow \frac{1}{m}$  חסם עליון של  $A^{-1}$  (ואפס חסם תחתון של  $A$  אם"ם  $A^{-1}$  לא חסומה).