

חשבון אינפי מתקדם
תרגיל 2 – פתרון

1.

$$f(x, y) = \begin{cases} \arctan \frac{x^2 + 1}{x^2 + (y-1)^2} & (x, y) \neq (0, 1) \\ \frac{\pi}{2} & (x, y) = (0, 1) \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \underbrace{\arctan \frac{x^2 + 1}{x^2 + (y-1)^2}}_{\rightarrow \infty} = \frac{\pi}{2} = f(0, 1)$$

⇐ הפונקציה רציפה בנקודה (0,1)

בשאר הנקודות הפונקציה רציפה כהרכבה של פונקציות רציפות.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}$$

ניקה $x = y \rightarrow 0$

$$\lim_{x=y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4} = 1 \neq 0$$

⇐ הפונקציה אינה רציפה בנקודה (0,0).

2.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ a & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2}$$

$$0 \leq \left| \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{x^3}{x^2 + y^2} \right| + \left| \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \right|$$

$$\leq \left| \frac{x^3}{x^2} \right| + \left| \frac{xy^2}{y^2} \right| = |x| + |x| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$$

⇐

⇐ עבור $a = 0$ הפונקציה $f(x, y)$ רציפה.

.3

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{2x^6 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

א. נבדוק את רציפות הפונקציה בנקודה $(0, 0)$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{2x^6 + y^2}$$

$$\lim_{\substack{y=x^3 \\ x \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^6}{3x^6} = \frac{1}{3} \neq 0$$

$f(x, y) \Leftarrow$ אינה רציפה בנקודה $(0, 0)$.

ב. נבדוק את קיום הנגזרות החלקיות בנקודה $(0, 0)$

$$f_x(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = 0$$

פתרון תרגילים נוספים :

2'021 1

2: אמצע המרחב / 1 אמצע המרחב

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \log(x^2+y^2) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \log(x^2+y^2) \stackrel{?}{=} 0 \quad \text{:(בדיקה)}$$

$$0 \leq |xy \log(x^2+y^2)| \leq (x^2+y^2) \log(x^2+y^2) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

↓
 $2xy \leq x^2+y^2$

$$\lim_{t \rightarrow 0} t \log t$$

לפני מציאת המענה

$$\lim_{t \rightarrow 0} t \log t = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log t}{1/t} \stackrel{\frac{0}{\infty}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t \ln 10} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t}{\ln 10} = 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \log(x^2+y^2) = 0 \quad \text{ולא על הסף!}$$

אם היינו רוצים לבדוק את המענה (0,0).

משום שהמענה הוא לבדוק בחיבור, מכילה והוכחה של פונקציות ציפוי!

ולא סוף לבדוק עם גחום העבודה.

2

2.

: (0,0) ו (0,0) -N נוסחה נוסחה

$$f'_x(x,y) = \frac{2(x^2+y^2)2x(x^4+y^2) - 4x^3(x^2+y)^2}{(x^4+y^2)^2} = \frac{(4x^3+4xy)(x^4+y^2) - 4x^3(x^4+2x^2y+y^2)}{(x^4+y^2)^2} =$$

$$= \frac{4xy(x^4+y^2) - 4x^3 \cdot 2x^2y}{(x^4+y^2)^2} = \frac{4x^5y + 4xy^3 - 8x^5y}{(x^4+y^2)^2} = \frac{4xy^3 - 4x^5y}{(x^4+y^2)^2} =$$

$$= \frac{4xy(y^2 - x^4)}{(x^4+y^2)^2}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{2(x^2+y^2)(x^4+y^2) - 2y(x^2+y)^2}{(x^4+y^2)^2} = \frac{(2x^2+2y)(x^4+y^2) - 2y(x^4+2x^2y+y^2)}{(x^4+y^2)^2} =$$

$$= \frac{2x^6 + 2x^2y^2 + 2yx^4 + 2y^3 - 2yx^4 - 4x^2y^2 - 2y^3}{(x^4+y^2)^2} = \frac{2x^6 - 2x^2y^2}{(x^4+y^2)^2}$$

: (0,0) ו (0,0) נוסחה נוסחה

$$f'_x(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0,0)+t(1,0)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t,0) - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1-1}{t} = 0$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0,0)+t(0,1)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0,t) - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1-1}{t} = 0$$

: (0,0)

$$f'_x(x,y) = \begin{cases} \frac{4xy(y^2 - x^4)}{(x^4+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f'_y(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^6 - 2x^2y^2}{(x^4+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

3.

$$\textcircled{a} \quad f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f'_x(x,y) = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2+y^2} - x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x}{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{-x}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2y = \frac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\textcircled{b} \quad f(x,y) = \arccos \sqrt{\frac{x}{y}}$$

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{! nicht!}$$

$$f'_x(x,y) = \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{-1}{2\sqrt{xy-x^2}}$$

$$f''_{xy}(x,y) = -\frac{1}{2} \left(\frac{-1}{xy-x^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{xy-x^2}} \cdot x \right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 \cdot x}{(xy-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{4(xy-x^2)^{3/2}}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}} \cdot \frac{-x}{y^2} = \frac{x}{2y\sqrt{xy-x^2}}$$

$$f''_{yx}(x,y) = \frac{1}{2y} \left(\frac{1 \cdot \sqrt{xy-x^2} - x \cdot \frac{1}{2\sqrt{xy-x^2}} \cdot (y-2x)}{xy-x^2} \right) =$$

$$\frac{1}{2y} \left(\frac{2(xy-x^2) - x(y-2x)}{2(xy-x^2)^{3/2}} \right) = \frac{1}{4y} \cdot \frac{xy}{(xy-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{4(xy-x^2)^{3/2}}$$

$$[f''_{xy} = f''_{yx} \quad \text{! nicht!}]$$

$$(0,0) \neq y \downarrow$$

! nicht! nicht! nicht! nicht! nicht!

4

④

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

שים לב! • שבת עקרה ששונה מ- (0,0) זו אמה פוע' כמו השאלה ②.
 הפונקציה הניי' (צורה בת עקרה ששונה מ- (0,0) כהרכבה וחיבור, כפל, וחילוק של פוע' רציפוי.
 כמוב' בת עקרה ששונה מ- (0,0) ובפרט בנק' (1,2) הנמצאה החוקיו' (אמ' מציג' השאלה ②)
 רציפוי, שים כהרכבה, חיבור וחילוק וכל' של פוע' רציפוי ולכן היא דיפרנציאביל' גם (נציג' חוקיו' רציפוי)
 דיפרנציאביל' (דיפרנציאביל')

בעקרה (0,0) נכוח שהפוע' אינה רציפה ולכן ונציג' שונה דיפרנציאביל' גם!
 נניח ש' השאלה שהפוע' רציפה, אזי הנגזרת לפי ט' מסלול שנקבע יהיה שווה 0.
 אלא אז נבחר מסלול

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2} \stackrel{\text{עקב!}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2+x^2)^2}{x^2+x^2} \stackrel{\text{מסלול אחר!}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^4}{2x^2} = 2 \neq 0$$

ולכן הפוע' אינה רציפה בנק' (0,0) ומונציג' שונה דיפרנציאביל' גם!

שמו! ♥

במשני המקו' דיפרנציאביל' של פוע' נבדוק באיזו רציפוי, גאם היא רציפה נבדוק
 נקום נציג' חוקיו' ונציפוי' וכן להפך נבדוק אז גע' דיפרנציאביל' .
 מסת' לזכור שגם הפונקציה החוקיו' אכן רציפוי' כמ' צדד' לא אמר שהפוע' אינה דיפרנציאביל' .