תרגיל 1

1. השתמשו במבחנים שלמדנו לטורים חיוביים (מבחן האינטגרל, מבחן ההשוואה הראשון, מבחן ההשוואה השני, מבחן קושי, מבחן דלמבר) כדי לקבוע התכנסות של הטורים הבאים:

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}e^{-\sqrt{n}}}$

ב. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{2^k}$

ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)!}{2^n}$

ד. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+\sin(k)}{k^2+10}$

ה. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k)}{k}$

2. בדקו אם הטורים הבאים מתכנסים בהחלט/בתנאי/מתבדרים:

א. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+2)\ln^2(k+2)}$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n}}$

ג. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

ד. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4-n^2}}$

3. יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים.

הוכיחו/הפריכו:

אם $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ וגם, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס, אזי גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

4. בסדרות הבאות מצאו את פונקציית הגבול וקבעו את יש התכנסות במידה שווה:

א. $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ בתחום $[0,1]$

ב. $f_n(x) = \frac{1}{nx+1}$ בתחום $(0,\infty)$

ג. $f_n(x) = \frac{\arctan(x)}{n}$ בכל $\mathbb{R}$

5. השתמשו במבחן ה-M של ווירשטראס והוכיחו התכנסות של הטורים הבאים :

א. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sin\left(\frac{1}{4^n x}\right)$ בקטע $[1,\infty)$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)\sqrt{n}}$ בקטע $I = [-1,1]$.