# תורת החבורות 88-218-01 תשפ"א
# הערות הרצאה 6

שלום!

**תזכורת 0.1.** יהי $f\colon G\to H$ הומומורפיזם. אז

$$G/_{\ker f}\cong \operatorname{im} f$$
$$g\cdot \ker f\mapsto f(g)$$

**דוגמה 0.2.** נאמר שהעתקה $T\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ היא אפינית אם קיימת מטריצה $A\in GL_n(\mathbb{R})$ ווקטור $v\in\mathbb{R}^n$ כך ש-$T$ מוגדרת לפי

$$T(x)=Ax+v$$

לכל $x\in\mathbb{R}^n$. אוסף ההעתקות האפיניות הוא חבורה $AGL_n(\mathbb{R})$ או לפעמים $\mathrm{Aff}_n(\mathbb{R})$ ביחס לפעולת ההרכבה. נבדוק סגירות:

$$T(x)=Ax+v \qquad\qquad S(x)=Bx+w$$

אז

$$(S\circ T)(x)=S(Ax+v)=B(Ax+v)+w=BAx+(Bv+w)$$

לכל $A,B\in GL_n(\mathbb{R})$ ו-$v,w\in\mathbb{R}^n$. נתבונן בתת־החבורה נורמלית של $T_n(\mathbb{R})\lhd AGL_n(\mathbb{R})$ המכילה את כל ההעתקות האפיניות מהצורה $T(x)=x+v$, הנקראות הזזות. לבית: לבדוק כי $T_n(\mathbb{R})$ סגורה להצמדה.

בנוסף יש שיכון של $GL_n(\mathbb{R})$ לתוך $AGL_n(\mathbb{R})$. נגדיר הומומורפיזם

$$\varphi\colon AGL_n(\mathbb{R})\to GL_n(\mathbb{R})$$
$$(T(x)=Ax+v)\mapsto A$$

קל לראות שזהו אפימורפיזם. אז לפי משפט האיזומורפיזם הראשון

$$AGL_n(\mathbb{R})/T_n(\mathbb{R})\cong GL_n(\mathbb{R})$$

## 0.1 מכפלה של תת־קבוצות

**הגדרה 0.3.** תהי $G$ חבורה, ותהינה $A, B \subseteq G$ תת־קבוצות. אז

$$A \cdot B := \{ab \,|\, a \in A, b \in B\}$$

ולנוחות נסמן $A^{-1} = \{a^{-1} \,|\, a \in A\}$.

**דוגמה 0.4.** פגשנו את הסימון בהגדרת מחלקות $aB = \{a\} \cdot B$. למשל $\{a\}\{b\} = \{ab\}$. אם $H \leq G$ תת־חבורה, אז $HH = H$ וגם $H^{-1} = H$.

טענה 0.5. תהי $G$ חבורה ותהי $H \leq G$ תת־חבורה. מכפלה של מחלקות שמאליות של $H$ היא מחלקה שמאלית של $H$ אם ורק אם $H$ נורמלית.

הוכחה. למעשה כבר הוכחנו את זה. בכיוון אחד, נניח $H \lhd G$. כלומר $bH = Hb$ לכל $b \in G$, ולכן

$$aH \cdot bH = a(Hb)H = abHH = abH$$

בכיוון השני, נניח שלכל $aH, bH \in G/H$ מתקיים $aHbH \in G/H$. לכן קיים $c \in G$ כך ש-$aHbH = cH$. בפרט זה נכון עבור $a = e_G$. לכן $HbH = cH$.

$$b \in bH, \qquad e \cdot b \cdot e \in cH$$

ולכן $b \in bH \cap cH$. מדובר במחלקות שקילות, ולכן $bH = cH$. נקבל

$$Hb \subseteq HbH = cH = bH$$

לכן $b^{-1}Hb \subseteq H$, וזה נכון לכל $b \in G$ ולכן $H \lhd G$. $\square$

**מסקנה 0.6.** למעשה הוכחנו שוב כי $G/H$ היא חבורה אם ורק אם $H \lhd G$.

טענה 0.7. תהינה $H, K \leq G$ תת־חבורות. אז $HK \leq G$ אם ורק אם $HK = KH$.

$$\forall h \in H \forall k \in K \exists h' \in H \exists k' \in K : hk = k'h'$$

הוכחה. בכיוון אחד נניח $HK \leq G$. אז

$$KH = K^{-1}H^{-1} = (HK)^{-1} = HK$$

מפני שמתקיים $(hk)^{-1} = k^{-1}h^{-1}$. הצדיקו את כל המעברים.

בכיוון השני, נניח $HK = KH$. אז ברור כי $HK \neq \varnothing$, שהרי $e = e \cdot e \in HK$. סגירות לפעולה היא לפי

$$HK \cdot HK = HHKK = HK$$

ויש סגירות להופכי כי

$$(HK)^{-1} = K^{-1}H^{-1} = KH = HK$$

ולכן $HK \leq G$. $\square$

**מסקנה 0.8.** בחבורה אבלית מכפלה של תת־חבורות היא תמיד תת־חבורה.

טענה 0.9. תהי $G$ חבורה, תהי $H \leq G$ תת־חבורה ותהי $N \lhd G$ תת־חבורה נורמלית. אז $HN \leq G$. אם בנוסף $H \lhd G$, אז $HN \lhd G$.

הוכחה. מתקיים

$$HN = \bigcup_{h\in H} hN = \bigcup_{h\in H} Nh = NH$$

וסיימנו לפי הטענה הקודמת, כלומר $HN \leq G$. אם בנוסף $H \lhd G$. אז לכל $g \in G$ מתקיים

$$g(HN)g^{-1} = gH \cdot g^{-1}g \cdot Ng^{-1} = gHg^{-1} \cdot gNg^{-1} \subseteq HN$$

מפני ששתי תת־החבורות $H, N$ סגורות להצמדה. □

**תרגיל 0.10** (לבית)**.** תהי $G$ חבורה ותהינה $A, B, C \leq G$ כך ש-$A \leq C$. הוכיחו כי $AB \cap C = A(B \cap C)$. לתכונה הזו קוראים המודולריות של תת־חבורות.

**תרגיל 0.11** (לבית)**.** תהי $G$ חבורה, ותהי $\{H_i\}_{i\in I}$ משפחה של תת־חבורות. הוכיחו כי

$$\bigcap_{i\in I} H_i \leq G$$

ואם בנוסף כל תת־החבורות הן נורמליות, אז גם החיתוך.

## 0.2 משפטי האיזומורפיזמים הנוספים

**משפט 0.12** (משפט האיזומורפיזם השני)**.** תהי $G$ חבורה ותהינה $H, N \leq G$ כך ש-$N \lhd G$. אז:

1. מתקיים $N \lhd NH$.
2. מתקיים $N \cap H \lhd H$.
3. מתקיים

$$NH/N \cong H/N\cap H$$

הוכחה. נוכיח את הסעיפים לפי הסדר.

1. ידוע $NH \leq G$ כי $N \lhd G$. קל לראות כי $N \leq NH$. לכל $g \in G$ מתקיים $gNg^{-1} \subseteq N$, ובפרט זה נכון עבור $g \in NH$. לכן $N \lhd NH$.
2. לכל $h \in H$ ולכל $x \in N \cap H$ מתקיים כי $h \in G$ וגם $x \in N$. לכן

$$hxh^{-1} \in N$$

כי $N \lhd G$. בנוסף $h, x \in H$. לכן $hxh^{-1} \in H$ כי $H \leq G$. בסך הכל $hxh^{-1} \in N \cap H$, ולכן $N \cap H \lhd H$.

3. זה הסעיף האמיתי. נגדיר העתקה

$$\begin{aligned}\varphi\colon H &\to NH/N\\ h &\mapsto hN\end{aligned}$$

לפי הגדרה ברור כי $\varphi$ היא על שהרי $nhN = hn'N = hN$ (כי $hN = Nh$).
לפי מה שראינו $\varphi$ היא הומומורפיזם

$$\varphi(h_1h_2) = h_1h_2N = h_1Nh_2N = \varphi(h_1)\varphi(h_2)$$

נותר לחשב את הגרעין

$$\ker\varphi = \{h \in H \mid hN = N\} = \{h \in H \mid h \in N\} = N \cap H$$

ומסיימים לפי משפט האיזומורפיזם הראשון.

$\square$

הערה 0.13. תהי $G$ חבורה, ותהינה $H, N \leq G$ כך ש-$N \lhd G$. אז

$$H/(N \cap H) \cong NH/N \leq G/N$$

לכן יש שיכון $H/(N \cap H) \hookrightarrow G/N$.

**תרגיל 0.14** (לבית)**.** לפי משפט האיזומורפיזם השני

$$|{}^{NH}/{}_{N}| = |{}^{H}/{}_{N\cap H}|$$

לכן אם $N, H$ הן סופיות, אז

$$|NH| = \frac{|N|\,|H|}{|N \cap H|}$$

הוכיחו שהשיוויון האחרון נכון גם אם $N, H$ לא בהכרח נורמליות.
רמז: פעולה של החבורה $H \times N$ על הקבוצה $G$ (או על הקבוצה $NH$).

**דוגמה 0.15.** נתבונן בחבורות הבאות

$$\begin{tikzcd}
 & GL_n(\mathbb{C}) \arrow[dl, dash] \arrow[ddr, dash, "\triangleleft"] & \\
H_n \arrow[ddr, dash, "\triangleleft"'] & & \\
 & & SL_n(\mathbb{C}) \arrow[dl, dash] \\
 & H_n \cap SL_n(\mathbb{C}) &
\end{tikzcd}$$

כאשר תת־החבורה $H_n$ היא

$$H_n \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & * & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \alpha \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{C}^* \right\}$$

נשים לב $H_n \cdot SL_n(\mathbb{C}) = GL_n(\mathbb{C})$. המחלקות השמאליות של $SL_n(\mathbb{C})$ כוללות את כל המטריצות עם דטרמיננטה קבועה.

$$\det(\operatorname{diag}(\alpha, \dots, \alpha)) = \alpha^n$$

כאשר ברור שהמטריצה האלכסונית $\operatorname{diag}(\alpha, \dots, \alpha) \in H_n$. לכל מטריצה $A \in GL_n(\mathbb{C})$, אפשר לבחור $\alpha = \det(A)^{1/n}$. לפי משפט האיזומורפיזם השני (והראשון) נקבל

$$\begin{aligned} H_n/(H_n \cap SL_n(\mathbb{C})) &\cong (H_n \cdot SL_n(\mathbb{C}))/SL_n(\mathbb{C}) \\ &= GL_n(\mathbb{C})/SL_n(\mathbb{C}) \\ &\cong \mathbb{C}^* \end{aligned}$$

מצד שני האיברים בחיתוך תת־החבורות הם

$$H_n \cap SL_n(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & * & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \alpha \end{pmatrix} \middle| \alpha^n = 1 \right\}$$

ולכן $H_n/(H_n \cap SL_n(\mathbb{C})) \cong \mathbb{C}^*/\Omega_n$ לפי משפט האיזומורפיזם הראשון. הרכבת כל האיזומורפיזמים שראינו מובילה אותנו למסקנה $\mathbb{C}^*/\Omega_n \cong \mathbb{C}^*$. כלומר אפשר להוציא שורש מכל סדר במרוכבים. אפשר להוכיח את זה ישירות ממשפט האיזומורפיזם הראשון לפי ההעתקה

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* &\to \mathbb{C}^* \\ z &\mapsto z^n \end{aligned}$$

שהיא אפימורפיזם שגרעינה $\Omega_n$.

**משפט 0.16** (משפט האיזומורפיזם השלישי). תהי $G$ חבורה ותהיינה $H, K \lhd G$ כך ש-$H \subseteq K$. אז

$$(G/H)/(K/H) \cong G/K$$

**תרגיל 0.17** (לבית). הוכיחו את המשפט בעזרת משפט האיזומורפיזם הראשון לפי ההדרכה.

- וודאו למה $H \lhd K$.
- למה טבעי להגדיר הומומורפיזם $f\colon G/H \to G/K$ לפי $f(gH) = gK$.
- הוכיחו כי $f$ מוגדר היטב. כלומר שאם $g_1H = g_2H$, אז $f(g_1H) = f(g_2H)$.
- הוכיחו כי $f$ הומומורפיזם.
- הוכיחו כי $f$ על.
- הוכיחו כי $\ker f = K/H$.
- סיימו לפי משפט האיזומורפיזם הראשון

**דוגמה 0.18.** יהיו $n, m \in \mathbb{Z}$. נניח $m|n$, אז $n\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z}$. לכן נשלב את משפט האיזומורפיזם הראשון והשלישי ונקבל

$$\begin{gathered}\mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/(m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_n/m\mathbb{Z}_n\end{gathered}$$

**מסקנה** (כפליות האינדקס). האינדקס של שרשרת תת־חבורות הוא כפלי. כלומר

$$[G : H] = [G : K][K : H]$$

כאשר $H \leq K \leq G$. זה נכון גם כאשר תת־החבורות הן לא נורמליות.

המקרה הפרטי שבו $H = \{e_G\}$, זה למעשה משפט לגראנז'!

הוכחה. אם החבורות והאינדקסים כולם סופיים, אפשר להשתמש במשפט לגראנז'

$$[G : H] = \frac{|G|}{|H|} = \frac{|G|}{|H|} \cdot \frac{|K|}{|K|} = \frac{|G|}{|K|} \cdot \frac{|K|}{|H|} = [G : K][K : H]$$

עבור המקרה הכללי, נתאמץ קצת יותר עם פונקציה חח"ע ועל. נבחר נציגים $a_i$ לכל מחלקה שמאלית של $K$ ב-$G$, ונבחר נציגים $b_j$ לכל מחלקה שמאלית של $H$ ב-$K$.

תהי $gH \in G/H$ מחלקה כלשהי. אז קיים $a_i$ נציג יחיד כך ש-$g \in a_iK$ כי איברי $G/K$ הם מחלקות שקילות. לכן קיים $k \in K$ כך ש-$g = a_ik$. אז קיים נציג $b_j$ יחיד כך ש-$k \in b_jH$ כי איברי $G/H$ הם מחלקות שקילות.

קיבלנו כי $g \in a_ib_jH$. נותר לבדוק (השתכנעו בבית) כי ההעתקה $(a_i, b_j) \mapsto a_ib_j$ היא חח"ע ועל. קל יחסית להשתכנע שהיא על, כי $g$ היה איבר כלשהו. החח"ע נובעת מכך ש-$a_i$ ו-$b_j$ נבחרו באופן יחיד. לכן יש התאמה חח"ע ועל בין קבוצה מעוצמה $[G : K][K : H]$ לקבוצה מעוצמה $[G : H]$. □

**טענה 0.19.** יהי $f\colon G \to H$ הומומורפיזם. נסמן $K = \ker f$. תהי $N \lhd G$ תת־חבורה נורמלית כך ש-$N \subseteq K$. אז $f$ משרה הומומורפיזם יחיד $\overline{f}\colon G/N \to H$ כך שהתרשים הבא הוא חילופי:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & H \\ & G/N \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

כלומר $f = \overline{f} \circ \pi$, כאשר $\pi\colon G \to G/N$ היא ההטלה הטבעית $\pi(g) = gN$. למעשה מתקיים:

1. ההומומורפיזם $\overline{f}$ הוא על אם ורק אם $f$ הוא על.
2. ההומומורפיזם $\overline{f}$ הוא חח"ע אם ורק אם $N = K$.
3. ההומומורפיזם $\overline{f}$ הוא חח"ע ועל אם ורק אם $f$ הוא על וגם $N = K$.

*הוכחה.* כדי שהתרשים יתחלף אז חייבים לקבוע $\overline{f}(gN) = f(g)$. לכן אם $\overline{f}$ קיים, אז הוא יחיד.

ההעתקה $\overline{f}$ מוגדרת היטב כי נתון ש-$N \subseteq K$: אם $g_1N = g_2N$, אז $g_2^{-1}g_1 \in N \subseteq K$. לכן $f(g_2^{-1}g_1) = e_H$. מפני ש-$f$ הוא הומומורפיזם נסיק

$$e_H = f(g_2^{-1}g_1) = f(g_2)^{-1}f(g_2)$$

ולכן $f(g_1) = f(g_2)$. מראים כי $\overline{f}$ הומומורפיזם כמו במשפט האיזומורפיזם הראשון.

הסעיף הראשון הוא ברור, כי יש ל-$f$ ול-$\overline{f}$ את אותה תמונה. לסעיף השני נחשב את הגרעין של $\overline{f}$:

$$\ker \overline{f} = \{gN \mid f(g) = e_H\} = \{gN \mid g \in K\} = K/N$$

ראינו כי הומומורפיזם הוא חח"ע אם ורק אם הגרעין שלו טריוויאלי. כלומר $\overline{f}$ הוא חח"ע אם ורק אם $\ker \overline{f} = \{e_{G/N}\} = \{N\}$. כלומר לכל $k \in K$ צריך להתקיים $kN = N$. כלומר $k \in N$, ולכן $N = K$. הסעיף השלישי נובע מיידית מהשניים האחרים. $\square$

## 0.3 סריג תת־החבורות

תהי $G$ חבורה. כבר דיברנו על הקבוצה $X$ של כל תת־החבורות של $G$. ראינו כי $G$ פועלת על $X$ לפי הצמדה.

**הגדרה 0.20.** תהי $(L, \leq)$ קבוצה סדורה חלקית. נאמר כי $L$ היא סריג אם לכל $a, b \in L$ קיימים

$$a \vee b \coloneqq \sup\{a, b\}$$
$$a \wedge b \coloneqq \inf\{a, b\}$$

כאשר $a \vee b$ נקרא המצרף (join) שלהם ו-$a \wedge b$ נקרא המפגש (meet) שלהם.

**דוגמה 0.21.** תהי $A$ קבוצה. קבוצת החזקה $P(A)$ יחד עם יחס ההכלה הוא סריג. המצרף הוא איחוד של תת־קבוצות, והמפגש הוא חיתוך של תת־קבוצות.

**הגדרה 0.22.** סריג $(L, \leq)$ יקרא מוזולרי אם $a \vee (c \wedge b) = (a \vee c) \wedge b$ לכל $a, b, c \in L$.

**דוגמה 0.23.** סריג תת־החבורות הנורמליות של חבורה (ביחס להכלה) הוא מודולרי.

**דוגמה 0.24.** סריג תת־החבורות של $\mathbb{Z}_6$ הוא

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{Z}_6 \arrow[dl, dash, "2"'] \arrow[dr, dash, "3"] & \\
\langle 2 \rangle \arrow[dr, dash, "3"'] & & \langle 3 \rangle \arrow[dl, dash, "2"] \\
& \{0\} &
\end{tikzcd}$$

החבורה ציקלית, ולכן ברור שכל תת־החבורות שלה הן ציקליות.

**דוגמה 0.25.** סריג תת־החבורות של $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ הוא

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \arrow[dl, dash, "2"'] \arrow[d, dash, "2"] \arrow[dr, dash, "2"] & \\
\langle (1,0) \rangle \arrow[dr, dash, "2"'] & \langle (1,1) \rangle \arrow[d, dash, "2"] & \langle (0,1) \rangle \arrow[dl, dash, "2"] \\
& \{(0,0)\} &
\end{tikzcd}$$

במקרה כל תת־החבורות הנאותות של $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ גם הן ציקליות, למרות שהיא לא ציקלית.

הערה 0.26. נרצה למצוא מי תת־החבורה במיקום $???$ בתרשים הבא

$$\begin{tikzcd}
& G \arrow[d, dash] & \\
& {\color{red}???} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
H \arrow[dr, dash] & & N \arrow[dl, dash] \\
& H \cap N &
\end{tikzcd}$$

ברור כי $H \wedge N = H \cap N$. אנחנו נראה כי $H \vee N = \langle H \cup N \rangle$ שנגדיר עכשיו.

**דוגמה 0.27.** אפשר למצוא דוגמאות בסייר תת־החבורות (קישור), בסייר החבורות (קישור) בכמה דרכים וגם בויקיפדיה.

## 0.4 תת־חבורה הנוצרת על ידי תת־קבוצה

**הגדרה 0.28.** תהי $G$ חבורה, ותהי $S \subseteq G$ תת־קבוצה. תת־החבורה הנוצרת על ידי $S$ היא תת־החבורה הקטנה ביותר של $G$ שמכילה את $S$, ומסומנת $\langle S \rangle$. כלומר אם $H \leq G$ וגם $S \subseteq H$, אז $\langle S \rangle \leq H$.

הערה 0.29. צריך להשתכנע שהיא קיימת, ויש שתי דרכים לפחות. הראשונה היא "מלמעלה למטה" לפי

$$\langle S \rangle = \bigcap_{\substack{H \leq G \\ S \subseteq H}} H$$

והחיתוך הזה לא ריק כי $S \subseteq G$.

**הגדרה 0.30.** אם $G = \langle S \rangle$ נאמר כי $G$ נוצרת על ידי $S$. אם קיימת $S$ סופית כך ש-$G = \langle S \rangle$ נאמר כי $G$ נוצרת סופית. עבור קבוצה סופית $\{x_1, \dots, x_n\}$ לרוב נכתוב $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ במקום $\langle \{x_1, \dots, x_n\} \rangle$. זה מכליל את ההגדרה של תת־חבורה ציקלית.

הערה 0.31. תהי $H \subseteq G$ תת־קבוצה. אז $H \leq G$ אם ורק אם $\langle H \rangle = H$.

הערה 0.32. יש בניה של $\langle S \rangle$ "מלמטה למעלה". נסתכל על כל המילים הסופיות באלפבית $S \cup S^{-1}$ ונשים לב שזו תת־חבורה המכילה את $S$. כלומר

$$\langle S \rangle = \bigcup_{k \geq 0} \left\{ s_1^{i_1} s_2^{i_2} \dots s_k^{i_k} \;\middle|\; s_1, \dots, s_k \in S,\ i_1, \dots, i_k \in \mathbb{Z} \right\}$$

המילה הריקה היא שווה לאיבר היחידה. זה שקול לבנייה ממקודם.

טענה 0.33 (קל). כל חבורה סופית היא נוצרת סופית.

**דוגמה 0.34.** $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$. מה לגבי

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \langle (0,1), (1,0) \rangle = \langle (0,2), (0,3), (1,0) \rangle$$

**דוגמה 0.35.** אם $G_1 = \langle S_1 \rangle$ ו-$G_2 = \langle S_2 \rangle$, אז

$$G_1 \times G_2 = \langle S_1 \times S_2 \rangle = \langle (S_1 \times \{e_2\}) \cup (\{e_1\} \times S_2) \rangle$$

**דוגמה 0.36.** יהיו $n, m \in \mathbb{Z}$. אז

$$\langle n, m \rangle = \langle \gcd(n,m) \rangle \leq \mathbb{Z}$$

אם $G$ אבלית, נניח $G = \langle a, b \rangle$, אז

$$G = \left\{ a^i b^j \,\middle|\, i, j \in \mathbb{Z} \right\}$$

למשל $abaaab^{-1}bbba^{-1}a = a^4b^3$. או באופן כללי בחבורה **אבלית** נוצרת סופית

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle = \left\{ a_1^{i_1} \ldots a_n^{i_n} \,\middle|\, i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{Z} \right\}$$

הערה 0.37. פתרנו את התעלומה וקיבלנו כי המצרף של $H$ ו-$K$ בסריג תת־החבורות של $G$ הוא

$$\begin{tikzcd}
& G \arrow[d, dash] & \\
& \langle H \cup N \rangle \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
H \arrow[dr, dash] & & N \arrow[dl, dash] \\
& H \cap N &
\end{tikzcd}$$

פעם הבאה נבין קצת יותר מסריג תת־החבורות.