שיטת פולינומי לגרנז' - המשך

כל פולינום דואג לפתור את הבעיה החלקית

$$l_i\left(x_j\right)=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

בסופו של דבר הפולינום המבוקש ניתן לביטוי ע"י

$$p\left(x\right)=\sum l_i\left(x\right)f_i=f_0l_0\left(x\right)+f_1l_1\left(x\right)+\cdots+f_nl_n\left(x\right)$$

הערה

מעבר למציאת הפונקציה עצמה, המטרה של האינטרפולציה היא לבצע הערכה לערכי x שונים - כלומר לפי הערכים שכבר יש לנו, להעריך את ערך הפונקציה במקומות נוספים.

לכן, לא חייבים לעשות תמיד את הפעולה היקרה של העברת הפולינום לייצוג קאנוני - לפעמים מספיק להשאיר את הפונקציה בצורה של צירוף לינארי של פולינומי לגרנז'. אמנם בצורה כזו ההצבה נעשית ב$O\left(n^2\right)$ במקום $O\left(n\right)$ בצורה הקאנונית - אבל זה חוסך לנו את מציאת הצורה הקאנונית ב$O\left(n^3\right)$.

שגיאת האינטרפולציה

מכיוון שלא מובטח לנו שהפונקציה המקורית היא פולינום ממעלה n - אין אפשרות להגיע באינטרפולציה בדיוק לפונקציה המקורית.

ניתן לבטא את השגיאה בתור

$$E\left(x\right)=\left(x-x_0\right)\cdot\left(x-x_1\right)\cdots\left(x-x_n\right)\cdot g\left(x\right)$$

עבור פונקציה כלשהי $g\left(x\right)$.

נגדיר פונקציית עזר $w\left(t\right)$ המקיימת

$$w\left(t\right)\overset{\text{def}}{=}\left(f\left(t\right)-p_n\left(t\right)\right)-\left(t-x_0\right)\left(t-x_1\right)\cdots\left(t-x_n\right)\cdot g\left(x\right)$$

(שימו לב! המרנו x בt לכל x פרט ל$g\left(x\right)$)

$w\left(t\right)$ מתאפסת ב$t=x_0,x_1,\dots x_n$(כי אז $f=p_n$ ולכן $f\left(t\right)-p_n\left(t\right)$ מתאפס, וגם $\left(t-x_0\right)\cdots\left(t-x_n\right)$ מתאפס), ובנוסף לכך גם ב$t=x$(כי אז $\left(t-x_0\right)\cdots\left(t-x_n\right)g\left(x\right)$ היא בדיוק השגיאה).

כלומר ל$w\left(t\right)$ $\left(n+2\right)$ שורשים (שונים). בהנחת רציפות וגזירות של $w\left(t\right)$, לפי משפט ערך הביניים, הנגזרת הראשונה $w'\left(t\right)$ חייבת להתאפס לפחות $\left(n+1\right)$ פעמים - לפחות פעם אחת בין כל אחד מ$\left(n+2\right)$ השורשים של $w\left(t\right)$.

באופן דומה, אם $w''\left(t\right)$ קיימת היא מתאפסת לפחות n פעמים, וכן הלאה - עד שמקבלים ש$w^{(n+1)}\left(t\right)$ מתאפסת לפחות פעם אחת.

נניח ש$w^{(n+1)}(t)$ מתאפסת ב$\xi = t$. אזי

$$0 = w^{(n+1)}(\xi) = \frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}t^{n+1}}\left[\left(f(t) - P_n\right) - (t - x_0)\cdots(t - x_n)\, g(x)\right] = \ldots$$

P_n פולינום מדרגה n, ולכן $P_n^{(n+1)} = 0$. לגבי $(t - x_0)\cdots(t - x_n)\, g(x)$ - $g(x)$ קבוע(גוזרים לפי t), והשאר זה פולינום מדרגה $n+1$ שהמקדם של המעלה הגבוהה ביותר שלו היא 1 - ולכן $\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}t^{n+1}}(t - x_0)\cdots(t - x_n)\, g(x) = (n+1)!g(x)$. נציב בחישוב:

$$\cdots = f^{(n+1)}(\xi) - 0 - (n+1)!g(x)$$

ולכן

$$g(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

שיטת חלוקות הפרשים לפי ניוטון(Divided Differences)

גם בשיטה הזו, הייצוג שמקבלים הוא לא ייצוג מפורש של הצורה הקאנונית.
הייצוג של הפולינום הוא

$$\begin{aligned} P_n(x) \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad a_0 \quad & + \quad (x - x_0)\, a_1 \\ & + \quad (x - x_0)(x - x_1)\, a_2 \\ & + \quad (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\, a_3 \\ & \vdots \quad\ \vdots \\ & + \quad (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})\, a_n \end{aligned}$$

נשים לב:

- מה שצריך למצוא כאן זה הaים - אבל אלו לא הaים של הצורה הקאנונית!
- המכפלה האחרונה היא עד $x - x_{n-1}$, לא עד $x - x_n$!

הגדרה - חלוקת הפרשים

- חלוקת הפרשים מסדר 1: מוגדרת באופן טריוויאלי:

$$f[x_0] = f(x_0)$$

- חלוקת הפרשים מסדר 2

$$f[x_0, x_1, x_2] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

- באופן כללי - חלוקת ההפרשים מסדר n

$$f\left[x_0, x_1, \dots x_n\right] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f\left[x_1, x_2, \dots x_n\right] - f\left[x_0, x_1, \dots x_{n-1}\right]}{x_n - x_0}$$

חישוב המקדמים a_i

- את a_0 קל לחשב, שכן $P_n\left(x_0\right) = a_0$.
- אחרי שמצאנו את a_0, אפשר למצוא את a_1 באמצעות $P_n\left(x_1\right) = a_0 + \left(x_1 - x_0\right) a_1$.
- וכן הלאה - ואפשר לבטא את זה באמצעות מטריצה משולשית:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \left(x_1 - x_0\right) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \left(x_{n-1} - x_0\right) & \cdots & \left(x_{n-1} - x_0\right) \cdots \left(x_{n-1} - x_{n-2}\right) & 0 \\ 1 & \left(x_n - x_0\right) & \cdots & \left(x_n - x_0\right) \cdots \left(x_n - x_{n-2}\right) & \left(x_n - x_0\right) \cdots \left(x_n - x_{n-1}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_n\left(x_0\right) \\ P_n\left(x_1\right) \\ \vdots \\ P_n\left(x_n\right) \end{pmatrix}$$

אבל אפילו את זה אפשר לחסוך. באמצעות מניפולציה אלגברית אפשר לקבל:

$$a_0 = f\left[x_0\right]$$

$$a_1 = f\left[x_0, x_1\right]$$

$$a_2 = f\left[x_0, x_1, x_2\right]$$

$$\vdots$$

$$a_i = f\left[x_0, x_1, \dots x_i\right]$$

$$\vdots$$

$$a_n = f\left[x_0, x_1, \dots x_n\right]$$

ההוכחה - ע"י אינדוקציה.

מסקנה

ניתן לייצג את פולינום האינטרפולציה באמצעות

$$
\begin{aligned}
P_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} f[x_0] &+ (x-x_0) f[x_0,x_1] \\
&+ (x-x_0)(x-x_1) f[x_0,x_1,x_2] \\
&+ (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) f[x_0,x_1,x_2,x_3] \\
&\vdots \quad \vdots \\
&+ (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) f[x_0,x_1,\dots x_n]
\end{aligned}
$$

שגיאת האינטרפולציה כתלות בחלוקת הפרשים

יהי t מספר שונה מ$x_0, x_1, \dots x_n$.

אינטרפולציה המובססת על $x_0, x_1, \dots x_n, t$ ניתנת לביטוי ע"י

$$
\begin{aligned}
P_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} f[x_0] &+ (x-x_0) f[x_0,x_1] \\
&+ (x-x_0)(x-x_1) f[x_0,x_1,x_2] \\
&+ (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) f[x_0,x_1,x_2,x_3] \\
&\vdots \quad \vdots \\
&+ (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) f[x_0,x_1,\dots x_n] \\
&+ (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) f[x_0,x_1,\dots x_n,t] \\
= P_n(x) &+ (x-x_0)\cdots(x-x_n) f[x_0,x_1,\dots x_n,t]
\end{aligned}
$$

ולכן, עבור $t = x_{n+!}$ ו$n = m+1$ נקבל

$$
f[x_0,x_1,\dots x_m] = \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}
$$

עבור ξ מסויים באינטרבל המכיל את $x_0, x_1, \dots x_m$.