# מבנים אלגבריים - תירגול 4

26 במרץ 2019

הגדרה: יהיו $(G_1, *), (G_2, \cdot)$ 2 חבורות. פונקציה $\phi : G_1 \to G_2$ נקראת הומומורפיזם (של חבורות) אם

$$\forall x, y \in G_1 : \phi(x * y) = \phi(x) \cdot \phi(y)$$

בנוסף אם $\phi$ חח"ע הוא יקרא מונומורפיזם. אם הוא על הוא יקרא אפימורפיזם. אם הוא חח"ע ועל הוא יקרא איזומורפיזם.
הערה: $\phi(e_{G_1}) = e_{G_2}$.
הערה: ההומורפיזם $\phi : G_1 \to G_2$ המוגדר $\forall g \in G_1 : \phi(g) = e$ נקרא ההומומורפיזם הטריוואלי.
דוגמא: $\phi : \mathbb{Z}_3 \to \langle (1,2,3) \rangle \subseteq S_3$ המוגדר ע"י: $0 \mapsto id, 1 \mapsto (1,2,3), 2 \mapsto (3,2,1)$, ואכן מתקיים: $\phi(1+1) = \phi(2) = (3,2,1) = (1,2,3)^2 = \phi(1)\phi(1), \phi(2+2) = \phi(1) = (,2,3) = (3,2,1)^2 = \phi(2)\phi(2), \phi(1+2) = \phi(0) = id = (1,2,3)(3,2,1) = \phi(1)\phi(2)$.
תרגיל: יהא $\phi : G_1 \to G_2$ מונומורפיזם. יהא $g \in G_1$ מסדר $n$ אזי $\phi(g)$ ג"כ מסדר $n$.
הוכחה: מצד אחד $(\phi(g))^n = \phi(g^n) = \phi(e_1) = e_2$, ובנוסף לכל $k < n$ נקבל $(\phi(g))^k = \phi(g^k) \neq e_2$ כי $g^k \neq e_1$ ו־$\phi$ חח"ע.
תרגיל: יהא $\phi : G_1 \to G_2$ אפימורפיזם. אם $G_1$ חילופית אז גם $G_2$.
הוכחה: יהיו $a, b \in G_2$ צ"ל כי $ab = ba$ . כיוון ש $\phi$ על אזי קימים $x, y \in G_1$ כך ש $\phi(x) = a, \phi(y) = b$. ואז

$$ab = \phi(x)\phi(y) = \phi(xy) = \phi(yx) = \phi(y)\phi(x) = ba$$

תרגיל: הוכח כי $S_n$ לא איזומורפי ל $S_m$ אם $m \neq n$.
פתרון: $|S_n| = n! \neq |S_m| = m!$ ולכן לא קיימת פונקציה חח"ע ועל בינהם.
תרגיל: הוכח כי $S_3$ לא איזומורפי ל $\mathbb{Z}_6$.
פתרון: $S_3$ לא אבלית ו $\mathbb{Z}_6$ כן.
תרגיל הוכח כי $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \ncong \mathbb{Z}_4$.
פתרון כל $g \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ הוא מסדר לכל היותר $2$ ואילו ב $\mathbb{Z}_4$ יש איבר מסדר 4.
תרגיל: הוכח כי $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_6$
פתרון: ראינו כי $(1,1)$ יוצר של $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ והסדר שלו 6. ל $\mathbb{Z}_6$ יש ג"כ יוצר מסדר 6 שהוא $1$. נגדיר $\phi : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ ע"י $\phi(1) = (1,1)$. בעצם שניהם איזומורפיזים לחבורה מופשטת שהיא $\{g^6 = 1, g, g^2, g^3, g^4, g^5\}$. גם שורשי יחידה מסדר 6 היא כזאת עם יוצר $e^{\frac{2\pi i}{6}}$
תרגיל: כמה איזמורפיזמים יש בין $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ ל - $\mathbb{Z}_6$ ?

פתרון: מספיק לקבוע לאיפה נשלח $1$. בנוסף, 1 צריך להשלח ליוצר וכל יוצר יגדיר לי איזמו' אחר. לכן השאלה שקולה לכמה יוצרים יש ל $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ שראינו בעבר שהתשובה היא 2.

חידוד על הומו'.

תרגיל: כמה הומו' יש בין $\phi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}$ וכמה $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$

פתרון: אם קיים הומו' $\phi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}$ אז הוא נקבע ע"י $\phi(1)$ נסמן $a = \phi(1)$ אזי צריך להתקיים

$$0 = \phi(0) = \phi(n \cdot 1) = n\phi(1) = na$$

האיבר היחיד שמתקים זאת הוא $a = 0$ ולכן קיים הומו' יחיד

לצד השני: אם קיים $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ אז הוא נקבע ע"י $\phi(1)$ נסמן $\phi(1) = [a]$ . באופן מפורש ההומורפיזים הוא $\phi(m) = m[a] = [ma]$ כלומר $m \mapsto ma \mod n$ לא צריך להתקיים שום יחס נוסף ולכן כל $a \in \mathbb{Z}_n$ יגדיר הומו' והם יהיו הומו' שונים. ולכן קיימים $n$ הומו' שונים.