תרגיל 6

- תאריכי הגשה: הקבוצה של יום שלישי – 14/12. יום רביעי – 15/12. יום חמישי – 16/12. *שימו לב: בשל חנוכה, קבוצה 05 (<u>בלבד</u>) יכולה להגיש את התרגיל לתא של מיכאל פרידמן (מס' 60) עד ה-16/12 ב-20:00.*
- נא לכתוב על התרגילים שם, ת.ז. ומספר קבוצת תרגול.
- ההגשה היא רק לקבוצות שאתם רשומים אליהן! תרגילים שיוגשו לקבוצות אחרות לא יבדקו.

1. נסתכל על D_4 ותת-החבורה $H=\{1,\tau\}\le D_4$.

   א. הוכיחו כי H איננה תת-חבורה נורמלית של D_4.

   ב. הראו כי כפל של מחלקות שמאליות של H ב-D_4 לא מוגדר היטב (כלומר מצאו איברים $a,b,c,d\in D_4$ כך ש-$aH=bH,\ cH=dH$ אבל $acH\ne bdH$).

2. תהי $G=U_{21}$ ו-$N=<8>\le G$.

   א. כמה מחלקות יש ל-N ב-G? (ענו על סעיף זה לפני שתרשמו את המחלקות בסעיף ב').

   ב. רשמו את המחלקות של N ב-G.

   ג. הוכיחו כי חבורת המנה G/N איזומורפית ל-$\mathbb{Z}_6$.

3. נסמן $(\mathbb{Q}^*)^2=\{x^2\ :\ x\in\mathbb{Q}^*\}$. (תזכורת: $\mathbb{Q}^*=\mathbb{Q}\setminus\{0\}$).

   א. מצאו את הסדר של חבורת המנה $G={\mathbb{Q}^*}\big/{(\mathbb{Q}^*)^2}$

   ב. מצאו את הסדר של כל איבר ב-G.

4. נסתכל על החבורה $(\mathbb{Q},+)$ ותת-החבורה שלה $(\mathbb{Z},+)$.

   א. תנו דוגמא למחלקה שמאלית לא טריוויאלית של $\mathbb{Z}$ ב-$\mathbb{Q}$ (לא טריוואלית - כלומר לא $\mathbb{Z}$ עצמה).

   ב. נסמן $G={\mathbb{Q}}\big/{\mathbb{Z}}$. הוכיחו שלכל איבר ב-$G$ יש סדר סופי.

   ג. הראו כי תת-החבורה של G הנוצרת ע"י המחלקות של $\frac{1}{15}$ ו-$\frac{1}{21}$ היא ציקלית. מה הסדר של תת-חבורה זו?

5. נתונות 8 החבורות הבאות: $U_3,U_4,U_5,U_6,U_7,U_8,U_9,U_{10}$ (תזכורת: $U_n=U(\mathbb{Z}_n)$ חבורה ביחס לכפל). חלקו אותן למחלקות איזומורפיזם – כלומר, קבעו אילו חבורות איזומורפיות זו לזו, ולכל שתי מחלקות שונות הסבירו מדוע חבורה מהמחלקה הראשונה אינה איזומורפית לחבורה מהמחלקה השניה.

6. תהי G חבורה. נסמן ב-A את תת-הקבוצה של האיברים מסדר סופי ב-G, כלומר $A=\{a\in G:\exists n\in\mathbb{N},\ a^n=e_G\}$. הוכחנו שאם G אבלית אז A היא תת-חבורה של G (היא נקראת "תת-חבורת הפיתול של G").

   א. נניח כי G לא אבלית ו-A בכל זאת מהווה תת-חבורה של G. הוכיחו ש-A תת-חבורה נורמלית של G.

   ב. הוכיחו שבחבורת המנה G/A אין איברים מסדר סופי. (רמז: הניחו בשלילה שיש איבר מסדר סופי ב-G/A, כלומר כי קיים $g\notin A$ ו-$n\in\mathbb{N}$ כך ש-$(gA)^n=e_{G/A}=A$, והגיעו לסתירה.)

7. א. נסתכל על $G=(\mathbb{C}^*,\cdot)$ ועל הפונקציה $f(x)=x^3$. הוכיחו כי $f:G\to G$ אפימורפיזם.

   ב. הוכיחו או הפריכו: לא קיימת חבורה G ותת-חבורה נורמלית לא טריוואלית $H\lhd G$ כך ש-G איזומורפית ל-G/H. (רמז: בדקו מה הגרעין של ההעתקה מסעיף א')

8*. (רשות – 10 נק') הראו כי לכל $n\ge 3$, D_n איזומורפית לתת-חבורה של S_n.