<u>מבנים דיסקרטיים – תרגול 8</u>

<u>! משפט לגראנז' (נוסח א'):</u> תהי G **סופית** ו- $H \le G$ אז $|H|\,|\,|G|$ כלומר סדר התת-חבורה מחלק את סדר החבורה.

<u>הגדרה:</u> ***האינדקס*** של תת-חבורה $H \le G$ מוגדר להיות $[G:H] := \frac{|G|}{|H|}$.

<u>! משפט לגראנז' (נוסח ב') :</u> תהי G **סופית** ו- $H \le G$ אז $|G| = [G:H]|H|$

<u>תרגיל:</u> יהיו $K \le H \le G$ ת"ח. אזי $[G:K] = [G:H][H:K]$.

<u>תרגיל:</u> $|G| = 20$. לפי משפט לגראנז' איזה סדר אפשרי לתתי החבורות של G ?

<u>פתרון:</u> סדר התת-חבורה מחלק את סדר החבורה לכן סדר התתי חבורות של G חייב לחלק את 20 ולכן הסדרים האפשריים הם: 1,2,4,5,10,20. אלה גם הסדרים היחידים האפשריים עבור איברים ב G, כפי שנראה במשפט הבא.

<u>משפט:</u> תהי G סופית ו- $g \in G$ אז $o(g)\,|\,|G|$ כלומר סדר איבר בחבורה סופית מחלק את סדר החבורה. (ההוכחה מיידית לפי משפט לגרנג' והגדרת סדר של איבר).

<u>תרגיל:</u> $|G| = 24$. איזה סדרים אפשריים לתתי-חבורות המכילות איבר מסדר 3?

<u>תרגיל:</u> כל חבורה מסדר p ראשוני היא ציקלית (ובפרט אבלית).

<u>תרגיל:</u> כמה יוצרים יש לחבורה מספר p ראשוני?

<u>תרגיל:</u> הראו שחבורה היא מסדר זוגי אם ורק אם קיים בה איבר מסדר 2.

<u>הוכחה:</u>

=> אם קיים איבר מסדר 2 אז לפי לגרנג' (או המשפט בתחילת העמוד) הסדר שלו (2) מחלק את סדר החבורה, ולכן סדר החבורה הוא זוגי.

<= איבר $a \ne e$ הוא מסדר 2 אם ורק אם $a = a^{-1}$. אם אין איברים מסדר 2, אז ניתן להצמיד כל איבר להפכי שלו (שהוא איבר שונה ממנו). ביחד עם איבר היחידה, נקבל מספר אי-זוגי.

<u>תרגיל:</u> תהי G חבורה עם שני איברים $a,b \in G$ מסדר 2 שמתחלפים ($ab = ba$).
אזי $4\,|\,|G|$.

תרגיל: תהי G חבורה מסדר $2p$ (p ראשוני) אז יש ל G איבר מסדר p (בפרט תת חבורה מסדר p).

הוכחה:

אם $p=2$ אז כבר הראנו בתרגיל קודם שבהכרח קיים איבר מסדר 2, ולכן סיימנו. לכן ניתן להניח ש p אי-זוגי.

לפי משפט לגראנז' הסדרים האפשריים של איברים הם: $1,2,p,2p$.

אם יש איבר מסדר p אז סיימנו ואם יש איבר a מסדר $2p$ אז נראה שמתקיים $o(a^2)=p$.

$o(a)=2p \Rightarrow a^{2p}=e \Rightarrow \left(a^2\right)^p=e \Rightarrow o(a^2)\,|\,p$.

אם כך $o(a^2)$ הוא 1 או p . הוא אינו יכול להיות 1 כי אז $o(a^2)=1 \Rightarrow a^2=e \Rightarrow o(a)\le 2$, סתירה לכך ש $o(a)=2p$. לכן בהכרח $o(a^2)=p$.

כעת נניח בשלילה שכל האיברים בחבורה הם מסדר 2 (פרט לאיבר היחידה מסדר 1).

כבר ראינו בתרגול הראשון שחבורה כזאת בהכרח אבלית.

לכן החבורה G אבלית וכיוון שיש לפחות שני איברים שונים מסדר 2, נוכל להשתמש בתרגיל הקודם ולקבל $4\,|\,|G|$, כלומר $4\,|\,2p$, סתירה לכן קיים איבר מסדר p או $2p$ □

הגדרה: תהיינה $(G,*_G,e_G)$ ו $(H,*_H,e_H)$ חבורות.

פונקציה $\varphi: G \to H$ תקרא **איזומורפיזם**. אם :

א. היא **כפלית**, כלומר אם מתקיים:

$\varphi(a *_G b)=\varphi(a) *_H \varphi(b) \quad \forall a,b\in G$. (הכפל מימין ומשמאל הוא שונה!)

ב. φ חח"ע ועל.

סימון: $G \cong H$ משמעותו G איזומורפי ל H כלומר קיים איזומורפיזם $\varphi: G \to H$.

המשמעות המעשית של איזומורפיזם היא שהחבורות G ו H הם למעשה זהות והפונקציה φ היא מילון שמתאים לכל איבר ב G איבר ב H .

תרגיל: הראו ש $\mathbb{Z}_6 \ncong S_3$.

תרגיל: הראו ש $\mathbb{Z}_4 \ncong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

תרגיל: הראו ש $\mathbb{Z}$ אינה איזומורפית ל $\mathbb{Q}$.

פתרון: $\mathbb{Z}$ היא חבורה ציקלית, ו $\mathbb{Q}$ היא לא.

תרגיל: הראו ש $\mathbb{Q}^*$ אינה איזומורפית ל $\mathbb{Q}$.

פתרון: ב $\mathbb{Q}$ אין איברים מסדר סופי פרט ל 0 (אם $n \neq 0, q \in \mathbb{Q}$ אזי $nq = 0 \Rightarrow q = 0$), וב- $\mathbb{Q}^*$ יש איבר (יחיד) מסדר 2 והוא -1 ($q^2 = 1 \Leftrightarrow q = \pm 1$).

תרגיל: הראו שלא קיים שיכון $f : GL_3(\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}^{20} = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} ... \times \mathbb{Q}$.

פתרון: החבורה $GL_3(\mathbb{Q})$ אינה אבלית, אך אם קיים שיכון (מונומורפיזם), אזי $\mathrm{Im}(f) \leq \mathbb{Q}^{20}$ אבל כל תת-חבורה של חבורה אבלית היא אבלית, ולכן $GL_3(\mathbb{Q}) \cong \mathrm{Im}(f)$ היא אבלית, סתירה.

תרגיל: בדקו עבור כל שתיים מהחבורות הבאות האם הן איזומורפיות: $\mathbb{R}, \mathbb{R}^*, \mathbb{R}^{>0}$

פתרון: $\mathbb{R} \ncong \mathbb{R}^*$ לפי אותה הוכחה עבור $\mathbb{Q} \ncong \mathbb{Q}^*$. $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{>0}$ לפי ההומומורפיזמים (איזומורפיזמים) $e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{>0}, \log x : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}$. $\mathbb{R}^{>0} \ncong \mathbb{R}^*$ לפי טרנזיטיביות של איזומורפיזמים, כיוון שאם $\mathbb{R}^{>0} \cong \mathbb{R}^*$ אזי $\mathbb{R} \ncong \mathbb{R}^*$, סתירה.